

X27409

N° 228



SUR LA TRACE DES OPÉRATEURS  
DE HECKE

Joseph OESTERLÉ

Thèse 3<sup>e</sup> cycle (1er mars 1977)

T H È S E

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR 3<sup>è</sup> CYCLE

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUE

par Joseph OESTERLÉ

Sujet de la thèse : SUR LA TRACE DES OPÉRATEURS DE HECKE

Soutenue le 1er mars 1977 devant la Commission d'Examen

MM. G. POITOU	Président
Mmes M. DUFLO	} Examineurs
et M.F. VIGNÉRAS	
D. ZAGIER	

I N T R O D U C T I O N

Un des plus puissants outils, dans la théorie des formes modulaires, est celui que fournissent les opérateurs de Hecke. Ceux-ci, d'abord introduits pour des formes modulaires relativement à  $SL_2(\mathbb{Z})$ , furent généralisés à des groupes beaucoup plus généraux, en particulier les groupes fuchsien de première espèce (cf. [7], chap. 3). Ils n'étaient considérés que dans le cas où le "poids" (notation précisée dans l'article) était entier, et ce n'est que récemment que Shimura les a généralisés au poids demi-entier (cf. [8]).

Ces opérateurs de Hecke sont des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie et par suite ont une trace. Le calcul de celle-ci revêt une certaine importance du fait des applications qu'on en tire :

- Il existe un algorithme, qui, à partir de la connaissance des traces des opérateurs de Hecke, permet de construire une base explicite de l'espace des formes modulaires.

A titre d'exemple, modulo conjectures, la connaissance des formules de trace en poids 2, permet de classer les courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$  à isogénie près.

- Lorsqu'on a une application d'un espace de formes modulaires dans un autre, on peut atteindre certaines propriétés de cette application grâce à la comparaison des traces des opérateurs de Hecke dans les deux espaces.

Exemples : . correspondance de Shimura allant des formes de poids demi-entier vers les formes de poids entier (cf. [9], p. 65).

. démonstration du fait qu'en poids entier toute forme modulaire provient d'une série thêta par la méthode des matrices d'Eichler Brandt (cf. [2]).

NOTATIONS

1°) Demi-plan de Poincaré et groupes fuchsien de première espèce.

. Nous noterons  $H = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z > 0\}$  le demi-plan de Poincaré, muni de la mesure  $dV = y^{-2} dx dy$ .

. Le groupe  $G = GL_2^+(\mathbb{R})$  agit sur  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  par :  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ .  $H$  est stable par  $G$  et  $dV$  est une mesure invariante pour l'action de  $G$ .

.  $\Gamma$  désignera un groupe fuchsien de première espèce, i.e. un sous-groupe discret de  $SL_2(\mathbb{R})$  tel que  $\Gamma \backslash H$  soit de volume fini. On notera  $\tau_\Gamma$  le cardinal de  $\Gamma \cap \{\pm 1\}$ , et  $\bar{\Gamma}$  le groupe quotient  $\Gamma / (\{\pm 1\} \cap \Gamma)$ .

Si  $\beta \in G$  on notera  $\Gamma_\beta$  le stabilisateur de  $\beta$  dans  $\Gamma$ , i.e.  $\{\gamma \in \Gamma / \gamma^{-1} \beta \gamma = \beta\}$ , et  $\bar{\Gamma}_\beta$  le quotient  $\Gamma_\beta / (\{\pm 1\} \cap \Gamma_\beta)$ .

Si  $x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , on notera  $\Gamma_x$  le stabilisateur de  $x$  dans  $\Gamma$ , i.e.  $\{\gamma \in \Gamma / \gamma x = x\}$ , et  $\bar{\Gamma}_x$  le quotient  $\Gamma_x / (\{\pm 1\} \cap \Gamma_x)$ .

. Nous noterons  $\int_{\Gamma \backslash H} \dots dV$  l'intégrale sur  $\Gamma \backslash H$  pour la mesure quotient de  $dV$  par la mesure de comptage de  $\Gamma$ . On a donc :

$$\int_{\Gamma \backslash H} \dots dV = (\tau_\Gamma)^{-1} \int_{\bar{\Gamma} \backslash H} \dots dV.$$

. Une matrice  $\beta \in G$  sera dite :

- elliptique si ses valeurs propres sont complexes, non réelles, ou, ce qui revient au même, si  $\beta$  laisse fixe un point de  $H$ ;
- hyperbolique si ses valeurs propres sont réelles distinctes, ou, ce qui revient au même, si  $\beta$  laisse fixes deux points distincts de  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , et deux points seulement ;
- scalaire si elle est proportionnelle à la matrice identité ;
- parabolique si ses deux valeurs propres sont réelles confondues et si  $\beta$  est non scalaire, ou, ce qui revient au même, si  $\beta$  admet un point fixe unique dans  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

. Si  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et si  $\rho \in SL_2(\mathbb{R})$  est tel que  $\rho(x) = \infty$ , on

appelle pointe de Siegel en  $x$  tout sous-ensemble  $\Lambda$  de  $H$  tel que  $\rho(\Lambda)$  soit de la forme  $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z \in [a, b[ , \operatorname{Im} z > c\}$ , avec  $a < b$  et  $c > 0$ .

. Un sous-ensemble  $F$  de  $H$  sera appelé "bon domaine fondamental" de  $H$  pour  $\Gamma$  s'il a les propriétés suivantes :

- $F$  est borélien,
- $H$  est réunion disjointe des  $\gamma F$ , pour  $\gamma \in \Gamma$ ,
- il existe un système  $(x_j)_{1 \leq j \leq r}$  de représentants des points paraboliques de  $H$  pour  $\Gamma$  (i.e : points fixés par une matrice parabolique appartenant à  $\Gamma$ ) et pour tout  $j$  une pointe de Siegel en  $x_j$ ,  $\Lambda_j$ , tels que les  $\Lambda_j$  soit incluses dans  $F$  et que  $F - \bigcup_j \Lambda_j$  soit relativement compact dans  $H$ .

Remarque : les  $x_j$  étant fixés, il est toujours possible de trouver  $F$  avec les propriétés ci-dessus.

## 2°) Formes modulaires et opérateurs de Hecke.

. Nous supposerons fixé un réel  $k$  (dans tout l'exposé, sauf précision contraire,  $k$  sera supposé strictement supérieur à 2) et nous noterons  $\mathcal{Q}$  l'ensemble formé des couples  $(\beta, j_\beta)$  vérifiant les propriétés suivantes :

$\beta$  est un élément de  $G = GL_2^+(\mathbb{R})$ ,

$j_\beta$  est une fonction définie sur  $H$ , de la forme  $t_\beta (J_\beta(z))^k$ ,

où  $t_\beta$  est un complexe de module 1, et où  $J_\beta(z) = (cz+d)$ ,

si  $\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

. L'exponentiation complexe sera définie par :

$$z^{z'} = \exp(z'(\operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z)) \quad \text{si } z \in \mathbb{C}^* \text{ et } z' \in \mathbb{C},$$

avec  $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ .

.  $\mathcal{Q}$  sera muni d'une structure de groupe définie par :

$$(*) \quad (\beta, j_\beta)(\beta', j_{\beta'}) = (\beta'', j_{\beta''})$$

avec  $\beta'' = \beta\beta'$ , et  $j_{\beta''}(z) = j_{\beta}(\beta'z) j_{\beta'}(z)$ .

On fera agir  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  en posant :

$$(\beta, j_{\beta}).z = \beta z .$$

Un élément  $(\beta, j_{\beta})$  de  $\mathcal{G}$  sera dit elliptique, hyperbolique, scalaire ou parabolique si  $\beta$  est elliptique, hyperbolique, scalaire ou parabolique.

. On notera  $\mathcal{SQ}$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}$  formé des couples  $(\beta, j_{\beta})$  où  $\beta \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ .

. Pour tout  $\gamma \in \Gamma$  nous supposons donnée une fonction  $j_{\gamma}$  sur  $H$  telle que  $(\gamma, j_{\gamma}) \in \mathcal{G}$  et que la condition (\*) soit réalisée si  $\beta \in \Gamma$ ,  $\beta' \in \Gamma$  et  $\beta'' = \beta\beta'$ . Dans ce cas  $\Delta_0 = \{(\gamma, j_{\gamma}) / \gamma \in \Gamma\}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{SQ}$  canoniquement isomorphe à  $\Gamma$ ; nous identifierons, sans le signaler, tout au long de l'exposé, les éléments de  $\Gamma$  et ceux de  $\Delta_0$ .

. On appelle forme modulaire pour  $\Delta_0$  (le réel  $k$  s'appelant poids de la forme modulaire) une fonction  $f$  holomorphe définie sur  $H$  et ayant les propriétés suivantes :

- $f$  est holomorphe aux pointes (cf. [10], p. 262),
- $f(\gamma z) = j_{\gamma}(z) f(z)$  pour tout  $(\gamma, j_{\gamma}) \in \Delta_0$  et  $z \in H$ .

Si en outre  $f$  est nulle aux pointes (cf. [10], p. 262), on dit que  $f$  est parabolique. On notera  $S$  l'espace des formes paraboliques; on peut prouver qu'il est de dimension finie. Si  $-1 \in \Gamma$  et si  $j_{-1}$  n'est pas la fonction constante égale à 1,  $S = \emptyset$ . C'est pourquoi, si  $-1 \in \Gamma$ , nous supposons  $j_{-1}(z) = 1$ .

. Si  $f$  et  $g$  sont dans  $S$ ,  $f(z) \overline{g(z)} y^k dv$  est invariant par  $\Gamma$  et on définit sur  $S$  un produit scalaire, dit de Petersson, par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma \backslash H} f(z) \overline{g(z)} y^k dv .$$

Celui-ci munit  $S$  d'une structure d'espace de Hilbert.

. Nous supposons donnée une réunion finie disjointe de  $\Gamma$ -classes bilatères :  $\nabla = \bigcup_{i=1}^s \Gamma \alpha_i \Gamma$ , les  $\alpha_i$  étant dans le commensurateur de  $\Gamma$  (i.e :  $\alpha_i^{-1} \Gamma \alpha_i$  et  $\Gamma$  sont commensurables) dans  $G$ , et pour tout élément  $\beta$  de cette réunion, nous supposerons donnée une fonction  $j_\beta$  sur  $H$  telle que  $(\beta, j_\beta) \in \mathcal{G}$ . L'ensemble des couples  $(\beta, j_\beta)$  ainsi obtenus sera noté  $\Delta$ . Nous supposerons la condition (\*) réalisée si  $\beta'' = \beta\beta'$ , avec, soit  $\beta \in \nabla$  et  $\beta' \in \Gamma$ , soit  $\beta \in \Gamma$  et  $\beta' \in \Delta$ .

Dans ce cas la première projection définit une bijection de  $\Delta$  sur  $\nabla$ , et  $\Delta$  est réunion disjointe des  $\Delta_o(\alpha_i, j_{\alpha_i})\Delta_o$  (cf. [8], prop. 1.1). Nous identifierons par la suite les éléments de  $\nabla$  et ceux de  $\Delta$ .

. A  $\Delta$  est associé un opérateur  $T_\Delta$  agissant sur  $S$ , appelé opérateur de Hecke et défini par :

$$T_\Delta f(z) = \sum_{\beta \in \Delta \setminus \Delta_o} (j_\beta(z))^{-1} f(\beta z)$$

(cf. [10], p. 264).

### 3°) Quelques fonctions arithmétiques.

. La lettre  $p$  désignera toujours un nombre premier,  $v_p$  sera la valuation  $p$ -adique sur  $\mathbb{Z}$  normalisée par  $v_p(p) = 1$ .

. Si  $a$  et  $b$  sont des entiers relatifs non tous deux nuls,  $(a, b)$  désignera leur pgcd dans  $\mathbb{N}^*$ .

. Si  $c \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{Z}^*$ , le symbole  $\left(\frac{c}{d}\right)$  sera défini par :

$\left(\frac{c}{d}\right)$  est complètement multiplicatif en  $d$

$\left(\frac{c}{-1}\right) = -1$  si  $c < 0$ ,  $1$  si  $c \geq 0$

$\left(\frac{c}{d}\right) = 0$  si  $(c, d) \neq 1$

$\left(\frac{c}{2}\right) = (-1)^{(c^2-1)/8}$  si  $c$  impair

$\left(\frac{c}{p}\right)$  est le symbole de Legendre si  $p$  est un premier impair et  $(c, p) = 1$ .

Le symbole  $\left(\frac{c}{d}\right)$  ainsi défini jouit des propriétés suivantes :

- Si  $d \neq -1$ ,  $c \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  est complètement multiplicative.
- Si  $d > 0$  et  $d \not\equiv 2(4)$ ,  $c \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  est périodique de période  $d$ .
- Si  $d > 0$  et  $d \equiv 2(4)$ ,  $c \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  est périodique de période  $4d$ .
- Si  $c \equiv 0$  ou  $1(4)$ ,  $d \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  est périodique de période  $|c|$ .
- Loi de réciprocité :  $\begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ , lorsque  $c \in \mathbb{Z}^*$  et  $d \in \mathbb{Z}^*$ , vaut  $-1$  si  $\begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ d \end{pmatrix}$  sont égaux à  $-1$ , et vaut  $1$  sinon.

. On notera  $\Gamma_0(N)$  le sous-groupe de  $SL_2(\mathbb{Z})$  défini par

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) / c \equiv 0(N) \right\} .$$



H I S T O R I Q U E   E T  
P R E S E N T A T I O N   D E S   R E S U L T A T S

Le calcul des formules de trace se décompose toujours clairement en deux parties :

La première partie, qui repose sur des procédés analytiques ou s'appuie sur des résultats de géométrie algébrique, vise à trouver une formule "théorique" de la trace, pour des groupes assez généraux.

C'est Selberg ([6]), qui, le premier, énonça de telles formules ; une autre méthode fut mise au point par Eichler ([3]). Les résultats ainsi obtenus ne s'appliquaient malheureusement qu'au poids entier, et il a fallu attendre Shimura pour obtenir les résultats en poids demi-entier ; Shimura ([10]) généralisait en fait la méthode d'Eichler, mais sa démonstration nécessitait des résultats puissants de géométrie algébrique.

Zagier ([11]) reprenait une méthode connue de Petersson pour calculer de façon "élémentaire" la trace des opérateurs  $T(n)$  dans le cas classique où le groupe fuchsien est  $SL_2(\mathbb{Z})$  et le poids entier pair. Il m'a suggéré que cette méthode pourrait peut-être s'étendre et c'est effectivement cette méthode qui est développée dans les chapitres I et II, pour obtenir tout d'abord une expression de la trace comme intégrale d'un certain noyau (résultat énoncé dans le théorème 1) puis comme somme de certains complexes attachés aux classes de conjugaison de  $\Delta$  par  $\Delta_0$ .

On retrouve ainsi l'expression donnée par Shimura dans ([10]), à ceci près que son expression est en fait la différence de la trace de l'opérateur de Hecke sur les formes paraboliques de poids  $k$  et d'un opérateur associé sur les formes entières de poids  $2-k$ , ceci étant valable lorsque  $k < 2$  également, alors que la formule obtenue dans

cet exposé n'est valable que pour  $k > 2$ .

La deuxième partie consiste à appliquer la formule obtenue dans la première partie à des cas particuliers, pour obtenir des expressions entièrement explicites et aisément programmables sur ordinateurs.

Eichler ([2]) calcule ainsi la trace des opérateurs  $T(n)$  en poids entier  $\geq 2$  pour les groupes  $\Gamma_0(N)$ ,  $N$  étant sans facteurs carrés et  $n$  étant premier à  $N$ . Hijikata ([4]) étend ce calcul, toujours en poids  $\geq 2$ , et en supposant  $(n, N) = 1$ , mais sans restrictions sur  $N$ .

La formule générale, obtenue sans hypothèses sur  $n$ , est calculée ici,  $N$  étant quelconque et  $k > 2$ . Le résultat est énoncé dans le théorème 3, partie III. Il ne me semble pas que pour l'instant ce résultat ait été publié. Le cas où  $k=2$  se déduit aisément de la démonstration : il suffit en fait d'utiliser la formule analytique donnée par Shimura ([10]), le calcul explicite ayant été fait sans utiliser l'hypothèse  $k > 2$  (cf. Théorème 3' de la partie III).

Une deuxième application du théorème 2 consiste à calculer la dimension de l'espace des formes paraboliques de poids demi-entier  $k$  relatives à  $\Gamma_0(N)$  et à un caractère  $\chi$  (cf. [9]). Il semblerait que ces formules soient connues, bien que non publiées, par les élèves de Shimura. Cohen vient également de les obtenir en appliquant le théorème de Riemann-Roch.

Les formules que j'obtiens (cf. théorème 4) donnent la valeur de  $\dim S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  lorsque  $k$  est demi-entier, et  $k > 2$ . En utilisant la formule analytique de Shimura (cf. [10], p. 273), on obtient également la valeur de  $\dim S_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi) - \dim M_{1/2}(\Gamma_0(N), \chi)$  et celle de  $\dim M_{1/2}(\Gamma_0(N), \chi) - \dim S_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi)$ , ainsi que je l'indique au théorème 4'.

Compte tenu des résultats de Serre et Stark à paraître, où sont exhibées des bases explicites pour  $S_{1/2}(\Gamma_0(N), \chi)$  et  $M_{1/2}(\Gamma_0(N), \chi)$ , on arrive ainsi à trouver la dimension de  $S_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi)$  et  $M_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi)$ .

Qu'il me soit ici permis de remercier Zagier pour ses suggestions, Marie-France Vigneras pour son soutien constant et Henri Cohen pour les vérifications qu'il m'a permis de faire en me faisant part de ses propres résultats.



obtient écartant la valeur de  $\dim S_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi) = \dim M_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi)$  et celle de  $\dim M_{1/2}(\Gamma_0(N), \chi) = \dim S_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi)$ , ainsi que de l'indique au théorème 4.

I - EXPRESSION INTÉGRALE DE LA TRACE

Théorème 1.

1) Soit  $k > 2$ . La série  $\omega_{\Delta}(z, \tau) = \sum_{\beta \in \Delta} (j_{\beta}(z))^{-1} (\tau + \beta z)^{-k}$  converge normalement sur tout compact de  $H \times H$  et définit, pour tout  $\tau \in H$ , une fonction de  $z$  qui appartient à  $S$ .

2) Si  $(f_j)_{j \in J}$  est une base orthonormale de  $S$ , on a :

$$\omega_{\Delta}(z, -\bar{\tau}) = c_k \sum_{j \in J} T_{\Delta} f_j(z) \overline{f_j(\tau)} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{\pi}{k-1} i^{-k} 2^{2-k}.$$

$$3) \text{Tr}(T_{\Delta}) = c_k^{-1} \int_{\Gamma \setminus H} \omega_{\Delta}(z, -\bar{z}) y^k dV.$$

Démonstration : a) Démontrons d'abord 1) et 2) dans le cas où  $\Delta = \Delta_0$ . La convergence absolue presque partout de la série définissant la fonction  $\omega_{\Delta_0}$  résulte de l'inégalité :

$$(1) \int_{\Gamma \setminus H} \sum_{\gamma \in \Gamma} |j_{\gamma}(z) (\tau + \gamma z)^k|^{-1} y^{k/2} dV = \int_H |\tau + z|^{-k} y^{k/2} dV < \infty,$$

obtenue en utilisant l'égalité :  $|j_{\gamma}(z) (\tau + \gamma z)^k|^{-1} y^{k/2} = (\text{Im}(\gamma z))^{k/2}$ .

Pour tout  $\eta \in H$ , il existe une constante  $C_{\eta} > 0$  telle que :

$$\forall u \in H, \forall z \in H, |z - \eta| \leq \frac{1}{2} \text{Im} \eta \implies |z + u| \geq C_{\eta} |\eta + u|.$$

Si la série définissant  $\omega_{\Delta_0}$  converge absolument au point  $(z_0, \tau_0)$  elle converge normalement sur  $B(z_0, \frac{1}{2} \text{Im} z_0) \times B(\tau_0, \frac{1}{2} \text{Im} \tau_0)$ , en vertu des inégalités suivantes valables si  $|z - z_0| < \frac{1}{2} \text{Im} z_0$ ,  $|\tau - \tau_0| < \frac{1}{2} \text{Im} \tau_0$  et  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  :

$$\begin{aligned} |J_{\gamma}(z) (\tau + \gamma z)| &\geq C_{\tau_0} |J_{\gamma}(z) (\tau_0 + \gamma z)| = C_{\tau_0} |J_{\gamma}(\tau_0) (z + \gamma \tau_0)| \\ &\geq C_{\tau_0} C_{z_0} |J_{\gamma}(\tau_0) (z_0 + \gamma \tau_0)| = C_{\tau_0} C_{z_0} |J_{\gamma}(z_0) (\tau_0 + \gamma z_0)|, \quad \text{avec} \quad \gamma = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La série définissant  $\omega_{\Delta_0}$  converge donc normalement sur tout compact de  $H \times H$  et définit, pour  $\tau$  fixé, une fonction de  $z$  holomorphe sur  $H$ , vérifiant la relation :  $\omega_{\Delta_0}(\gamma z, \tau) = j_{\gamma}(z) \omega_{\Delta_0}(z, \tau)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , de façon évidente ; en outre cette fonction est para-

bolique en vertu de l'inégalité (1).

Si  $f \in S$ ,  $f(z)y^{k/2}$  est bornée sur  $H$  et l'inégalité (1) justifie le calcul suivant du produit scalaire de  $f$  par  $\omega_{\Delta_0}(\cdot, -\bar{\tau})$ , considérée comme fonction de  $z$  :

$$\begin{aligned} \langle f, \omega_{\Delta_0}(\cdot, -\bar{\tau}) \rangle &= \int_{\Gamma \backslash H} f(z) \overline{\omega(z, -\bar{\tau})} y^k dV = \int_{\Gamma \backslash H} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma z) (-\tau + \gamma \bar{z})^{-k} (\text{Im}(\gamma z))^k dV \\ &= \int_H f(z) (-\tau + \bar{z})^{-k} y^k dV = \bar{c}_k f(\tau), \end{aligned}$$

en vertu de la proposition 1 de l'Annexe.

Appliquant en particulier ceci aux fonctions  $(f_j)_{j \in J}$  appartenant à une base orthonormale de  $S$ , on trouve la décomposition suivante de  $\omega_{\Delta_0}$  sur cette base :  $\omega_{\Delta_0}(z, -\bar{\tau}) = c_k \sum_{j \in J} f_j(z) \overline{f_j(\tau)}$ .

b) Revenons au cas général. Les deux premières assertions du théorème sont maintenant triviales, compte tenu de la relation, évidente par définition :  $\omega_{\Delta}(\cdot, \tau) = T_{\Delta} \omega_{\Delta_0}(\cdot, \tau)$ .

Nous pouvons donc écrire :

$$c_k^{-1} \int_{\Gamma \backslash H} \omega_{\Delta}(z, -\bar{\tau}) y^k dV = \sum_{j \in J} \langle T_{\Delta} f_j, f_j \rangle = \text{Tr}(T_{\Delta}).$$

C.Q.F.D

II - LA FORMULE EXPLICITE DE LA TRACE

Théorème 2. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $\Delta$  pour la relation  $\mathcal{R}$  définie par :  $\beta \mathcal{R} \beta'$  si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $\exists \gamma \in \Delta_0$ ,  $\beta = \gamma^{-1} \beta' \gamma$
- $\beta$  et  $\beta'$  sont paraboliques, et il existe  $\gamma \in \Delta_0$  et  $\gamma' \in \Gamma_\beta$  telles que  $\beta' = \gamma^{-1} \gamma' \beta \gamma$ .

La formule de la trace s'écrit alors :

$$(2) \quad \text{Tr}(T_\Delta) = \sum_{\beta \in \mathcal{C}} I(\beta)$$

où  $I(\beta)$  est un complexe qui ne dépend que de la classe  $\dot{\beta}$  de  $\beta$ , et qui est défini de la façon suivante :

- a) Si  $\beta$  est scalaire,  $\beta = ((\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}), \eta)$ , on a :

$$(3) \quad I(\beta) = (k-1)(4\pi\eta\tau_\Gamma)^{-1} \text{Vol}(\bar{\Gamma} \backslash H).$$

- b) Si  $\beta$  est elliptique, avec  $j_\beta(z) = t_\beta(cz+d)^k$ , on a :

$$(4) \quad I(\beta) = (\sigma_\beta t_\beta \rho^{k-1} (\rho - \bar{\rho}))^{-1}$$

$\rho$  et  $\bar{\rho}$  étant les valeurs propres de  $\beta$ ,  $\rho$  étant celle dont la partie imaginaire a le signe de  $c$ , et  $\sigma_\beta$  étant égal au cardinal de  $\Gamma_\beta$ .

- c) Si  $\beta$  est hyperbolique, et si ses points fixes ne sont pas des points paraboliques de  $H$  pour  $\Gamma$ ,  $I(\beta) = 0$ .

- d) Si  $\beta$  est hyperbolique et que ses points fixes sont des points paraboliques de  $H$  pour  $\Gamma$ , soit  $\delta \in \mathcal{SQ}$  tel que :

$$\delta^{-1} \beta \delta = ((\begin{smallmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \lambda' \end{smallmatrix}), \eta) \quad \text{avec} \quad |\lambda'| < |\lambda|. \quad \text{Alors on pose :}$$

$$(5) \quad I(\beta) = (\tau_\Gamma \eta (\frac{\lambda'}{\lambda} - 1))^{-1}.$$

- e) Si  $\beta$  est parabolique, de point fixe  $x$ , il existe  $\delta \in \mathcal{SQ}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$  tels que  $\delta (\varepsilon (\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), \mu) \delta^{-1}$

engendre  $\bar{\Gamma}_x$ . Si  $\delta^{-1}\beta\delta = \left( \begin{pmatrix} a & a\mu X \\ 0 & a \end{pmatrix}, \eta \right)$  et si  $\mu = e^{-2\pi i\alpha}$ , avec  $0 \leq \alpha < 1$ , on pose :

$$(6) \quad I(\beta) = -\frac{1}{2\eta} e^{-2\pi i\mu\alpha} (1-2\alpha) \quad \text{si } \mu \in \mathbb{Z}$$

$$(7) \quad I(\beta) = -\frac{1}{2\eta} e^{-2\pi i\mu\alpha} (1-i\cot\pi\mu) \quad \text{si } \mu \notin \mathbb{Z}$$

Remarques sur l'énoncé du théorème.

1) Dans l'énoncé, les propriétés suivantes de  $\Delta$  ont été implicitement admises :

- Si  $\beta$  est hyperbolique, ou bien aucun de ses points fixes n'est point parabolique de  $H$  pour  $\Gamma$ , ou bien les deux le sont.

- Si  $\beta$  est parabolique, son point fixe  $x$  est un point parabolique de  $H$  pour  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}_x$  est donc infini.

Ces assertions seront prouvées au cours de la démonstration.

2) Le fait que  $I(\beta)$  ne dépend que de la classe  $\dot{\beta}$  de  $\beta$  est relativement trivial, et nous laisserons au lecteur le soin de le vérifier.

3) Au e), la condition  $\mu \in \mathbb{Z}$  signifie que  $\beta$  est proportionnelle à une matrice de  $\Gamma$ .

4) Au e), le réel  $\alpha$  introduit mesure l'irrégularité de la pointe parabolique en  $x$  (cf. [9], p. 25). En particulier  $\alpha$  est nul si et seulement si cette pointe est régulière.

Avant d'aborder la démonstration du théorème, prouvons deux lemmes techniques.

Lemme 1. Soit  $\beta \in \Delta$ ,  $\delta \in \text{SQ}$ ,  $\beta' = \delta^{-1}\beta\delta$ ,  $z \in H$  et  $z' = \delta(z)$ . On a :  $(j_\beta(z'))^{-1}(-\bar{z}' + \beta z')^{-k} (\text{Im } z')^k = (j_{\beta'}(z))^{-1}(-\bar{z} + \beta' z)^{-k} (\text{Im } z)^k$ .

Démonstration : Utilisant la notation matricielle, on trouve :

$$(8) \quad J_\beta(z')(-\bar{z}' + \beta z') = \begin{pmatrix} 1 & -z' \\ & 1 \end{pmatrix} \beta \begin{pmatrix} z' \\ 1 \end{pmatrix} = |J_\delta(z)|^{-2} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z} \\ & 1 \end{pmatrix} \beta' \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \\ = |J_\delta(z)|^{-2} J_{\beta'}(z)(-\bar{z} + \beta' z)$$

et, compte tenu de la relation  $\text{Im } z' = |J_\delta(z)|^{-2} \text{Im } z$ , on se ramène donc à prouver :

$$(9) \quad (j_\beta(z'))^{-1} j_{\beta_1}(z) = (J_{\beta_1}(z)(J_\beta(z'))^{-1})^k.$$

Mais, puisque  $\delta\beta' = \beta\delta$ , on a les deux égalités suivantes :

$$(10) \quad j_\beta(z') j_\delta(z) = j_\delta(\beta'z) j_{\beta_1}(z),$$

$$(11) \quad J_\beta(z') J_\delta(z) = J_\delta(\beta'z) J_{\beta_1}(z).$$

Nous sommes donc ramenés à montrer que :

$$(12) \quad j_\delta(\beta'z)(j_\delta(z))^{-1} = (J_\delta(\beta'z)(J_\delta(z))^{-1})^k.$$

Le premier membre de (12) est  $(J_\delta(\beta'z))^k (J_\delta(z))^{-k}$  ; il est trivialement égal au second membre si  $\delta$  est triangulaire supérieure ; sinon, l'égalité résulte du fait que  $J_\delta(\beta'z)$  et  $J_\delta(z)$  sont dans un même demi-plan ouvert limité par l'axe des abscisses.

Lemme 2. Soit  $x$  un point parabolique de  $H$  pour  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  une pointe de Siegel en  $x$ . Alors :

$$\int_{\Lambda} \sum_{\substack{\beta \in \Delta \\ \beta(x) \neq x}} |(j_\beta(z))^{-1} (-\bar{z} + \beta z)^{-k}| y^k dv < \infty.$$

Démonstration : Soit  $\delta \in \mathbb{S}\mathbb{Q}$  tel que  $\delta(\infty) = x$ . Compte tenu du lemme 1, on se ramène au cas où  $x = \infty$  en remplaçant  $\Lambda$  par  $\delta^{-1}\Delta\delta$ ,  $\Delta_\infty$  par  $\delta^{-1}\Delta_\infty\delta$  et  $\Lambda$  par  $\delta^{-1}\Lambda$ . Si  $B = \{\beta \in \Delta / \beta(\infty) \neq \infty\}$ , si  $\bar{\Gamma}_\infty$  est engendré par  $(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}, *)$  et si  $N$  est un majorant des  $(\det \beta)^{-k/2}$  pour  $\beta \in \Delta$ , le premier membre de l'inégalité du lemme 2 est majoré par :

$$(13) \quad \int_{\Lambda} \sum_{\beta \in \bar{\Gamma}_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_\Gamma |-\bar{z} + \beta z + nX|^{-k} (\text{Im}(\beta z))^{k/2} y^{k/2} dv,$$

en utilisant l'égalité :  $|j_\beta(z)|^{-1} y^{k/2} = (\text{Im}(\beta z))^{k/2} (\det \beta)^{-k/2}$ .

Les parties imaginaires des éléments de  $\Lambda$  étant bornées inférieurement par une constante strictement positive  $C$ , on montre aisément l'existence de  $A > 0$  tel que :



$$\forall z \in H, \quad \text{Im } z \geq C \implies \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z+nX|^{-k} \leq A (\text{Im } z)^{-k+1}$$

et par suite l'intégrale (13) est majorée par :

$$(14) \quad \int_{\Lambda} \sum_{\beta \in \Gamma_{\infty} \setminus B} NA_{\Gamma} (\text{Im}(\beta z))^{k/2} y^{1-k/2} dV \leq NA_{\Gamma} C^{1-k/2} \int_{\Lambda} \sum_{\beta \in \Gamma_{\infty} \setminus B} (\text{Im}(\beta z))^{k/2} dV .$$

Si  $\beta$  et  $\beta'$  sont dans une même classe à gauche pour  $\Gamma$  (i.e : si  $\beta\Gamma = \beta'\Gamma$ ), on a  $\beta\Lambda \cap \beta'\Lambda = \emptyset$ . D'autre part il existe  $A_1 > 0$  tel que pour tout  $\beta \in B$ ,  $\beta\Lambda \subset U = \{z \in H / \text{Im } z < A_1\}$ . Avec ces notations, on a :

$$(15) \quad \int_{\Lambda} \sum_{\beta \in \Gamma_{\infty} \setminus B} (\text{Im}(\beta z))^{k/2} dV \leq \text{Card}(\Delta/\Gamma) \int_{\Gamma_{\infty} \setminus U} y^{k/2} dV < \infty$$

ce qui, compte tenu de (14), achève la démonstration.

Démonstration du théorème 2 : Esquissons d'abord une démonstration formelle, sans se préoccuper de la convergence. D'après le théorème 1, on a :

$$\text{Tr}(T_{\Delta}) = c_k^{-1} \int_{\Gamma \setminus H} \sum_{\beta \in \Delta} (j_{\beta}(z))^{-1} (-\bar{z} + \beta z)^{-k} y^k dV .$$

Si  $\Delta'$  désigne un système de représentants des  $\Delta_{\circ}$ -classes de conjugaison de  $\Delta$ , on serait tenté d'écrire, en utilisant le lemme 1 :

$$(16) \quad \text{Tr}(T_{\Delta}) = c_k^{-1} \int_{\Gamma \setminus H} \sum_{\beta \in \Delta'} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\beta} \setminus \Gamma} (j_{\beta}(\gamma z))^{-1} (-\gamma \bar{z} + \beta \gamma z)^{-k} (\text{Im}(\gamma z))^k dV$$

$$(17) \quad = c_k^{-1} \sum_{\beta \in \Delta'} \int_{\Gamma_{\beta} \setminus H} (j_{\beta}(z))^{-1} (-\bar{z} + \beta z)^{-k} (\text{Im } z)^k dV .$$

En fait cet échange du signe sommation et du signe d'intégration n'est pas légitime (d'ailleurs certaines des intégrales obtenues en (17) sont divergentes).

Pour remédier à ceci nous allons introduire une forme plus faible de l'intégrale, analogue à la notion d'intégrale convergente mais non absolument convergente dans  $\mathbb{R}$ .

Nous choisirons un "bon domaine fondamental"  $F$  de  $H$  pour  $\bar{\Gamma}$ .

Si  $f$  est une fonction sur  $H$  invariante par  $\Gamma$ , nous noterons  $\int_{\Gamma \setminus H}^* f(z) dV$  la limite, si elle existe de l'intégrale :

$\frac{1}{\tau_\Gamma} \int_{F-\Lambda_1-\dots-\Lambda_r} f(z) dV$ , lorsque  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$

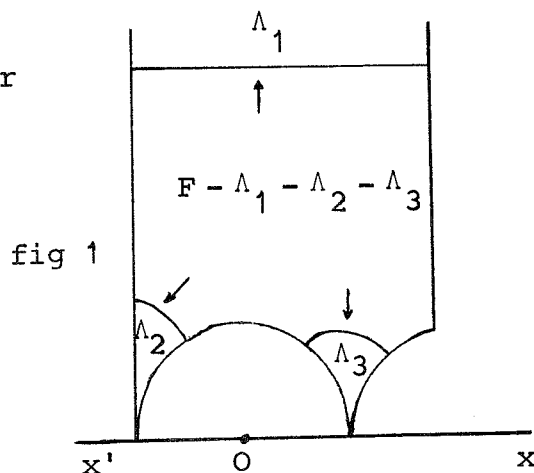
tendent indépendamment vers  $\emptyset$ , les

$(\Lambda_j)_{1 \leq j \leq r}$  étant des pointes de Siegel

de  $F$  (cf. schéma ci-contre). Cette

notion d'intégrale est évidemment indé-

pendante du choix de  $F$ .



Nous prouverons dans la suite que le raisonnement heuristique qui conduisait à l'expression (16) reste valable, à condition de remplacer  $\int_{\Gamma \backslash H}$  par  $\int_{\Gamma \backslash H}^*$  et la relation de  $\Gamma$ -conjugaison (ou  $\Delta_0$ -conjugaison, ce qui est identique) par la relation  $\mathcal{R}$  définie dans l'énoncé du théorème 2.

La quantité  $I(\beta_0)$  si  $\dot{\beta}_0$  est la classe de  $\beta_0$  sera donc définie par :

$$(18) \quad I(\beta_0) = c_k^{-1} \int_{\Gamma \backslash H}^* \sum_{\beta \in \dot{\beta}_0} (j_\beta(z))^{-1} (-\bar{z} + \beta z)^{-k} y^k dV$$

et on en déduira la relation cherchée :

$$(19) \quad \text{Tr}(T_\Delta) = \sum_{\dot{\beta} \in \mathcal{C}} I(\beta).$$

Passons maintenant au calcul des diverses contributions :

a) Cas des matrices scalaires.

Soit  $\beta = \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \eta \right)$ . On a  $\dot{\beta} = \{\beta\}$ . Par définition :

$$\begin{aligned} I(\beta) &= c_k^{-1} \eta^{-1} \int_{\Gamma \backslash H}^* (2iy)^{-k} y^k dV = c_k^{-1} \eta^{-1} (2i)^{-k} \tau_\Gamma^{-1} \text{Vol}(\bar{\Gamma} \backslash H) \\ &= (k-1)(4\pi\eta\tau_\Gamma)^{-1} \text{Vol}(\bar{\Gamma} \backslash H). \end{aligned}$$

b) Cas des matrices elliptiques.

En vertu du lemme 2, la contribution des matrices elliptiques peut être "sortie" de l'intégrale comme cela a été fait en (17), et l'intégrale (18) est en fait absolument convergente.

$\Gamma_\beta$  est égal à  $\Gamma_x$ , où  $x$  est le point fixe de  $\beta$ , et  $\Gamma_\beta$  est fini. Si  $\sigma_\beta$  est son cardinal, et si :

$$\beta = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, t_\beta (cz+d)^k \right),$$

l'intégrale (18) s'écrit, en procédant comme en (17) :

$$(20) \quad I(\beta) = c_k^{-1} \int_{\Gamma_\beta \setminus H} (t_\beta)^{-1} (cz+d)^{-k} (-\bar{z} + \beta z)^{-k} y^k dV = (c_k \sigma_\beta t_\beta)^{-1} \int_H d\Omega$$

avec :

$$(21) \quad \Omega = (cz+d)^{-k} \frac{y^{k-1}}{k-1} (-\bar{z} + \beta z)^{1-k} (z - \beta z)^{-1} dz.$$

$\Omega$  n'est définie que sur  $H - \{z_0\}$ ,  $z_0$  étant le point fixe de  $B$  dans  $H$ . Remarquons que par définition de  $\rho$ , on a :

$$(22) \quad \rho = cz_0 + d$$

$$(23) \quad z - \beta z = (z - z_0) - (\beta z - \beta z_0) = (z - z_0) \left( 1 - \frac{ad-bc}{(cz+d)\rho} \right) = (z - z_0) \left( 1 - \frac{\bar{\rho}}{cz+d} \right).$$

Appliquons la formule de Green-Riemann à un domaine analogue à celui utilisé dans la démonstration de la proposition 1 de l'Annexe. Si on remarque qu'ici encore l'intégrale de  $\Omega$  sur  $D_R$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini, on trouve, compte tenu de (20), (21), (22) et (23) :

$$(24) \quad I(\beta) = c_k^{-1} (\sigma_\beta t_\beta)^{-1} \rho^{-k} (2i)^{1-k} \left( 1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)^{-1} (-2\pi i) (k-1)^{-1} \\ = (\sigma_\beta t_\beta)^{-1} \rho^{1-k} (\rho - \bar{\rho})^{-1}.$$

c) Cas des matrices hyperboliques dont les deux points fixes ne sont pas des points paraboliques de  $H$  pour  $\Gamma$ .

Toujours en vertu du lemme 2, et comme pour les matrices elliptiques, on peut "sortir" la contribution de ces matrices ainsi que cela a été fait en (17), et on est assuré de la convergence absolue de l'intégrale (18).

On peut toujours, en vertu du lemme 1, pour calculer  $I(\beta)$ , se ramener au cas où  $\beta = \left( \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \eta \right)$ , en remplaçant éventuellement  $\Delta$  et  $\Delta_0$  par leurs conjugués par un élément de  $S\mathbb{Q}$ . On a alors :

$$(24) \quad I(\beta) = c_k^{-1} \int_{\Gamma_\beta \setminus H} \eta^{-1} \left( -\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z \right)^{-k} y^k dV.$$

Nous savons que cette intégrale est absolument convergente. D'autre

part, l'intégrale sur  $H$  de la fonction  $(-\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z)^{-k} y^k$  diverge. Ces deux remarques entraînent que nécessairement  $\Gamma_\beta$  est infini.

Un élément de  $\Gamma_\beta$  laisse fixes les points fixes de  $\beta$  associés aux valeurs propres  $\lambda'$  et  $\lambda$ , i.e.  $\infty$  et  $0$ . Si  $\gamma = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix} \in \Gamma_\beta$ , avec  $u \notin \{1, -1\}$ , le sous-groupe  $\Gamma'_\beta$  de  $\Gamma_\beta$  engendré par  $\gamma$  est d'indice fini dans  $\Gamma_\beta$ . Pour prouver la nullité de l'intégrale (19), il suffit donc de prouver la nullité de :

$$\int_{\Gamma'_\beta \backslash H} (-\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z)^{-k} y^k dV = \int_{1 \leq \text{Im } z \leq u^2} (-\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z)^{-k} y^k dV .$$

Le résultat s'obtient en intégrant d'abord par rapport à  $x$  la deuxième de ces intégrales.

d) Cas des autres matrices hyperboliques.

Soit  $\beta \in \Delta$  hyperbolique avec au moins un point fixe  $x$  qui soit parabolique. En remplaçant éventuellement  $\Delta$  et  $\Delta_0$  par leurs conjugués par un élément de  $\mathcal{S}\mathcal{Q}$ , on se ramène au cas où  $x = \infty$  et  $\beta = \left( \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \eta \right)$ ; si les deux points fixes de  $\beta$  sont paraboliques, on peut même se ramener au cas où  $|\lambda'| < |\lambda|$ . Nous supposons ceci réalisé dans la suite.

Le stabilisateur  $\Gamma_\beta$  de  $\beta$  est réduit à  $\{1, -1\}$  : en effet si  $\gamma \in \Gamma_\beta$ ,  $\gamma(\infty) = \infty$  (même démonstration qu'au c)), donc  $\gamma$  est une matrice parabolique ou scalaire et ne peut laisser  $0$  fixe que si c'est une matrice scalaire.

Le "bon domaine fondamental"  $F$  utilisé pour calculer l'intégrale sera choisi avec les propriétés suivantes :

- $\infty$  sera point limite de  $F$ ,
- si  $0$  est parabolique pour  $\Gamma$  et n'est pas dans la même  $\Gamma$ -classe que  $\infty$ ,  $0$  sera point limite de  $F$ .

Si  $\xi$  est point limite de  $F$ , nous noterons  $\Lambda_\xi$  une pointe de Siegel de  $F$  en  $\xi$ .

Pour tout  $\gamma \in \Gamma$  nous définirons  $F_\gamma$  comme suit :

$F_\gamma$  est égal à  $F$  moins les pointes de Siegel de  $F$  associées à des points limites de  $F$  qui sont en même temps points fixes de  $\gamma^{-1}\beta\gamma$ . (Remarque : ces points sont toujours des conjugués de 0 et  $\infty$  ; comme ils sont points limites de  $F$ , ce sont soit 0, soit  $\infty$ ).

Alors le lemme 2 nous permet d'affirmer que l'intégrale

$$(25) \quad c_k^{-1} \tau_\Gamma^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{F_\gamma} (j_{\gamma^{-1}\beta\gamma}(z))^{-1} (-\bar{z} + \gamma^{-1}\beta\gamma z)^{-k} y^k dV$$

converge absolument ; de plus l'intégrale (18) définissant  $I(\beta)$  existe si et seulement si l'expression (25) a une limite lorsque les pointes de Siegel retranchées à  $F$  tendent vers  $\emptyset$  et, dans ce cas, est égale à cette limite.

Utilisant le lemme 1, (25) se transforme ainsi :

$$(26) \quad c_k^{-1} \tau_\Gamma^{-1} \int_{H'} (j_\beta(z))^{-1} (-\bar{z} + \beta z)^{-k} y^k dV$$

avec  $H' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F_\gamma) = H - A_\infty - A_0$ , où :

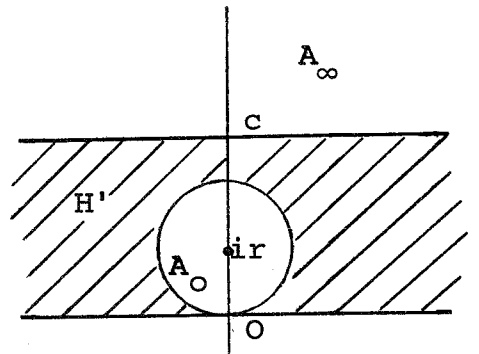
.  $A_\infty$  est un domaine de la forme

$$\{z \in H / \text{Im } z \geq c\}$$

.  $A_0$  est égal à  $\emptyset$  si 0 n'est pas un point parabolique de  $H$  pour  $\Gamma$ .

.  $A_0$  est égal à un horicyclole de centre 0, i.e. une boule de la forme  $B(ir, r)$ , si 0 est point parabolique de  $H$  pour  $\Gamma$  (cf. fig. 2).

fig 2



L'intégrale (26) s'écrit donc :

$$(27) \quad \eta^{-1} c_k^{-1} \tau_\Gamma^{-1} \int_{H - A_\infty - A_0} (-\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z)^{-k} y^k dV.$$

Si  $A_0 = \emptyset$ , cette intégrale n'est pas absolument convergente, contrairement à ce que nous savons ; ceci prouve (de façon détournée, je le concède) la première des assertions annoncées dans la remarque 1 qui suit l'énoncé du théorème. Donc 0 est parabolique pour  $\Gamma$  et nous avons dans ce cas, rappelons-le, supposé  $|\lambda'| < |\lambda|$ .

Comme  $(-\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z)^{-k} y^{k-2} dx dy = d\Omega$ , avec :

$$\Omega = (1 - \frac{\lambda'}{\lambda})^{-1} (k-1)^{-1} (-\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z)^{1-k} y^{k-2} dy ,$$

la formule de Green-Riemann montre que (27) s'écrit :

$$(28) -\pi^{-1} i^k 2^{k-2} \eta^{-1} \tau_{\Gamma}^{-1} (1 - \frac{\lambda'}{\lambda})^{-1} \int_{C_r} (-\bar{z} + \frac{\lambda'}{\lambda} z)^{1-k} y^{k-2} dy ,$$

où  $C_r$  est le cercle centre  $ir$  et de rayon  $r$ .  $I(\beta)$  est la limite lorsque  $r$  tend vers 0 de (28), et la proposition 2 de l'Annexe permet de conclure.

e) Cas des matrices paraboliques.

Comme au c) et au d), on se ramène, en remplaçant éventuellement  $\Delta$  et  $\Delta_0$  par un de leurs conjugués, à n'étudier que le cas où  $\beta$  est triangulaire supérieure.

Prouvons que, comme nous l'avons annoncé dans la remarque 1 qui suit l'énoncé du théorème, le point fixe de  $\beta$  (qui est  $\infty$  dans le cas que nous considérons) est un point parabolique de  $H$  pour  $\Gamma$ . Si ce n'était pas le cas, on aurait  $\Gamma_{\beta} = \{1, -1\}$ , car les seules matrices qui commutent à  $\beta$  sont des matrices paraboliques ou scalaires laissant  $\infty$  fixe. De plus le lemme 2 assurerait la convergence absolue de :

$$\int_{\Gamma \setminus H} \sum_{\gamma \in \bar{\Gamma}} (j_{\gamma^{-1}\beta\gamma}(z))^{-1} (-\bar{z} + \gamma^{-1}\beta\gamma z)^{-k} y^k dV$$

c'est-à-dire de :

$$\int_H (j_{\beta}(z))^{-1} (-\bar{z} + \beta z)^{-k} y^k dV .$$

Cette dernière intégrale ne peut être absolument convergente, la fonction à intégrer étant non nulle et indépendante de  $x$ .

Nous avons ainsi prouvé que  $\infty$  est point parabolique de  $H$  pour  $\Gamma$ . Soient  $X \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $u \in \mathbb{R}$  tels que  $(\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mu)$  engendre  $\bar{\Gamma}_{\beta} = \bar{\Gamma}_{\infty}$  et que  $\beta = (\begin{pmatrix} a & auX \\ 0 & a \end{pmatrix}, \eta)$ .

Les éléments de la classe de  $\beta$  pour la relation  $\mathcal{R}$  sont les conjugués par  $\Gamma$  des  $\beta\gamma = \gamma\beta$  lorsque  $\gamma$  décrit

$\Gamma'_\beta = \{\gamma \in \Gamma_\beta / \beta\gamma \text{ ne soit pas une matrice scalaire}\}$ .

(Remarque : si  $\gamma \in \Gamma'_\beta$ ,  $\gamma' \in \Gamma'_\beta$  et  $\gamma \neq \gamma'$ ,  $\beta\gamma$  et  $\beta\gamma'$  ne sont pas  $\Gamma$ -conjugués).

Soit  $F$  un "bon domaine fondamental" admettant  $\infty$  comme point limite. Soit  $\Lambda_\infty$  une pointe de Siegel en  $\infty$ . Si  $\gamma \in \Gamma$  et  $\gamma' \in \Gamma'_\beta$ , et si  $\gamma^{-1}\beta\gamma'\gamma$  laisse fixe un point limite de  $F$ , celui-ci est dans la  $\Gamma$ -classe de  $\infty$ , donc est  $\infty$ , et on a  $\gamma \in \Gamma_\infty$ . L'expression ci-dessous :

$$(29) \quad c_k^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \tau_\Gamma^{-1} \int_{F_\gamma} \sum_{\gamma' \in \Gamma'_\beta} (j_{\gamma^{-1}\gamma'\beta\gamma}(z))^{-1} (-\bar{z} + \gamma^{-1}\gamma'\beta\gamma z) y^k dV$$

avec  $F_\gamma = F - \Lambda_\infty$  si  $\gamma \in \Gamma_\infty$ ,  $F_\gamma = F$  sinon, est, d'après le lemme 2, absolument convergente.

L'intégrale (18) existe si et seulement si l'expression (29) a une limite quand  $\Lambda_\infty$  tend vers  $\emptyset$ , et est dans ce cas égale à cette limite. Compte tenu du lemme 1, l'intégrale (29) s'écrit :

$$(30) \quad \tau_\Gamma^{-1} c_k^{-1} \int_{H'} \sum_{\gamma' \in \Gamma'_\beta} (j_{\gamma',\beta}(z))^{-1} (-\bar{z} + \gamma'\beta z)^{-k} y^k dV$$

où  $H' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} F_\gamma$  peut être pris égal à :

$\{z \in H/O \leq \text{Re } z \leq X, \text{Im } z \leq c\}$ ,  $c$  étant assujetti à tendre vers  $\infty$  quand  $\Lambda_\infty$  tend vers  $\emptyset$ .

Soit  $\mathbb{Z}' = \{n \in \mathbb{Z} / n+u \neq 0\}$ . L'expression (30) vaut :

$$\begin{aligned} & c_k^{-1} \int_0^X \int_0^c \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \mu^{-n} \eta^{-1} (2iy + (u+n)X)^{-k} y^k dx dy \\ &= c_k^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \mu^{-n} \eta^{-1} (k-1)^{-1} (u+n)^{-1} c^{k-1} (2ic + (u+n)X)^{1-k}. \end{aligned}$$

Posant  $c' = 2cX^{-1}$ , on trouve finalement :

$$I(\beta) = \lim_{c' \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \mu^{-n} \eta^{-1} \frac{i}{2\pi} (1 - i(u+n)c'^{-1})^{1-k} (u+n)^{-1}$$

et la proposition 3 de l'Annexe permet de conclure.

C.Q.F.D.

III - CALCUL DE LA TRACE DE  $T(n)$  SUR  $S_k(\Gamma(N), \chi)$ , AVEC  $k$  ENTIER

Cette section sera consacrée à l'application du théorème 2 dans le cas particulier suivant :

$k$  est un entier  $> 2$  ;  $\chi$  est un caractère modulo  $N$  tel que  $\chi(-1) = (-1)^k$  et dont le conducteur sera noté  $g$  ;

$$\Delta_0 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \chi(a)^{-1} (cz+d)^k \right) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0(N) \right\} ;$$

$$\Delta = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \chi(a)^{-1} (cz+d)^k \right) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{M}_2(\mathbb{Z}), ad-bc = n, c \equiv 0(N), (a, N) = 1 \right\}.$$

Dans ce cas particulier, pour utiliser les notations classiques (cf. [5], chap. IV), on notera  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  au lieu de  $S$  et  $T(n)$  pour  $n^{k-1}T_\Delta$ .

Théorème 3. La trace de  $T(n)$  est égale à  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ , où :

$$a) \quad A_1 = n^{\frac{k-1}{2}} \chi(\sqrt{n}) \frac{k-1}{12} N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \text{ avec } \chi(\sqrt{n}) = 0 \text{ si } \sqrt{n} \text{ non entier}$$

$$b) \quad A_2 = - \sum_t p_k(t, n) \sum_{f|F} \frac{h((t^2-4n)f^{-2})}{w((t^2-4n)f^{-2})} \mu(t, f, n), \text{ où :}$$

. dans la première somme,  $t$  décrit les entiers relatifs tels que  $t^2 - 4n < 0$ .

. Si  $\rho$  et  $\bar{\rho}$  sont les racines de  $X^2 - tX + n$ ,

$$p_k(t, n) = (\rho - \bar{\rho})^{-1} (\rho^{k-1} - \bar{\rho}^{k-1}).$$

. Pour chaque  $t$ ,  $F$  est l'entier naturel tel que  $(t^2 - 4n)F^{-2}$  soit le discriminant d'un corps quadratique imaginaire  $K$ .

.  $h((t^2 - 4n)f^{-2})$  et  $w((t^2 - 4n)f^{-2})$  désignent respectivement le nombre de classes et le nombre d'unités de l'ordre de  $K$  ayant  $(t^2 - 4n)f^{-2}$  pour discriminant.

. Si  $(t^2 - 4n)f^{-2}$  est entier et congru à 0 ou 1 modulo 4, la propriété pour un entier  $x$  de vérifier  $(fN, N^2) | x^2 - tx + n$  ne dépend que de la classe de  $x$  modulo  $N$ . Soit  $E$  l'ensemble des classes modulo  $N$  ayant cette propriété. Alors



$$\mu(t, f, n) = \varphi_1(N) \varphi_1\left(\frac{N}{(N, f)}\right)^{-1} \sum_{x \in E} \chi(x)$$

$\varphi_1(N)$  étant le cardinal de la droite projective construite sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , à savoir :

$$\varphi_1(N) = N \prod_{p|N} (1+p^{-1}).$$

c)  $A_3 = - \sum_{\substack{0 < \lambda' < \lambda \\ \lambda \lambda' = n}} \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda - \lambda'} \sum_{b | (\lambda - \lambda')} \varphi\left(\frac{\lambda - \lambda'}{b}\right) \mu(\lambda + \lambda', b, n)$ , où  $\varphi$  est la fonction d'Euler.

d)  $A_4 = - \frac{1}{2} n^{(k-1)/2} \chi(\sqrt{n}) \sum_c \varphi\left(c, \frac{N}{c}\right)$ ,

la sommation portant sur les  $c$  divisant  $N$  tels que  $(c, \frac{N}{c}) | \frac{N}{g}$ .

Remarques sur l'énoncé : 1) Soit  $\delta$  le discriminant d'un corps quadratique imaginaire et  $\chi_\delta = \left(\frac{\delta}{\cdot}\right)$  le caractère associé. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\frac{h(\delta m^2)}{w(\delta m^2)} = \frac{h(\delta)}{w(\delta)} m \prod_{p|m} (1 - p^{-1} \chi_\delta(p))$$

(cf. [1], p. 277, ex. 20).

2) Pour  $A_3$ , on peut donner une autre expression, trouvée par Cohen :

$$A_3 = - \sum_{\substack{0 < \lambda' < \lambda \\ \lambda \lambda' = n}} \lambda^{k-1} \sum_c \varphi\left(c, \frac{N}{c}\right) \chi(x_1),$$

où  $c$  parcourt l'ensemble des diviseurs de  $N$  tels que  $(c, \frac{N}{c}) | (\frac{N}{g}, \lambda - \lambda')$  et où  $x_1$  est défini modulo  $\text{ppcm}(c, \frac{N}{c})$  par :  $x_1 \equiv \lambda' \pmod{c}$  et  $x_1 \equiv \lambda \pmod{\frac{N}{c}}$ .

Démonstration :

a) Calcul de  $A_1$ , contribution des matrices scalaires.

Si  $n$  non carré,  $\Delta$  ne contient pas de matrices scalaires et  $A_1 = 0$ . Il en va de même si  $n = m^2$ , avec  $(m, N) \neq 1$ .

Si  $n = m^2$  avec  $m > 0$  et  $(m, N) = 1$ ,  $\Delta$  contient deux matrices scalaires, à savoir :

$$\left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \chi(m)^{-1} m^k\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}, \chi(-m)^{-k} (-m)^k\right).$$

Compte tenu de l'hypothèse  $\chi(-1) = -1$ , l'application du théorème 2 conduit à :

$$A_1 = (k-1) \frac{\chi(m)}{4\pi} m^{-k} \text{Vol}(\bar{\Gamma} \backslash H) n^{k-1}.$$

Mais  $\text{Vol}(\overline{\text{SL}}_2(\mathbb{Z}) \backslash H) = \frac{\pi}{3}$  et  $[\overline{\text{SL}}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma}] = N \prod_{p|N} (1+p^{-1})$   
(cf. par exemple [7], chap. 1).

D'où le résultat annoncé.

b) Calcul de  $A_2$ , contribution des matrices elliptiques.

- Soit  $\beta = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \chi(a)^{-1} (cz+d)^k\right)$  un élément elliptique de  $\Delta$ , tel que  $c > 0$ . Posons alors  $\beta^* = \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}, \chi(a)^{-1} (-cz+d)^k\right)$ . Nous allons regrouper les contributions de la classe de  $\beta$  et de celle de  $\beta^*$ ; le théorème 2 conduit à :

$$(31) \quad I(\beta) + I(\beta^*) = \sigma_{\beta}^{-1} n^{k-1} (\rho - \bar{\rho})^{-1} (\rho^{1-k} - \bar{\rho}^{1-k}) \chi(a)$$

où  $\rho$  et  $\bar{\rho}$  sont les racines de  $X^2 - tX + n$ , avec  $\text{Im } \rho > 0$ .

L'expression (31) s'écrit encore :

$$(32) \quad I(\beta) + I(\beta^*) = -\sigma_{\beta}^{-1} p_k(t, n) \chi(\beta) \quad \text{où } t = a+d \text{ et } \chi(\beta) = \chi(a)$$

- Esquissons la démonstration :

Soit  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ elliptique, } ad-bc = n, c > 0 \right\}$ , sur lequel  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  opère par conjugaison. Nous prouverons que :

(33) . Le naturel  $f = \text{pgcd}(a-d, b, c)$  ne dépend que des classes de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -conjugaison dans  $B$ .

Il y a, dans  $B$ ,  $h((t^2 - 4n)f^{-2})$  classes de conjugaison (par  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ) dont les éléments ont une trace  $t$  et vérifient  $f = \text{pgcd}(a-d, b, c)$ . De plus le cardinal  $w_{\delta}$  du  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -stabilisateur d'un tel élément  $\delta$  est  $w((t^2 - 4n)f^{-2})$ .

(34) . Si  $\delta \in B$  a pour trace  $t$  et vérifie  $f = \text{pgcd}(a-d, b, c)$ , la somme suivante :

$$\sum_{\beta} \sigma_{\beta}^{-1} \chi(\beta)$$

où  $\beta$  décrit un système de représentants des classes de  $\Gamma$ -conjugaison de  $\Delta$ , qui sont  $SL_2(\mathbb{Z})$ -conjugués à  $\delta$ , est égale à  $\omega_{\delta}^{-1} \mu(t, f, n)$ .

Compte tenu de (32), les remarques (33) et (34) conduisent de façon évidente à l'expression annoncée dans l'énoncé du théorème 3.

- Démonstration de (33) :

Considérons l'application  $\psi$  de  $B_{t,f} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B/a+d = t ; f = \text{pgcd}(a-d, b, c) \right\}$  dans l'ensemble des matrices entières paires symétriques, définie par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2c & d-a \\ d-a & -2b \end{pmatrix} f^{-1}$$

et identifions une matrice symétrique paire  $A$  à la forme quadratique entière  $\frac{1}{2}(X \ Y) A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ .

On vérifie aisément que  $\psi$  est une bijection de  $B_{t,f}$  sur l'ensemble des formes quadratiques définies positives, primitives, entières, de discriminant  $(t^2 - 4n)f^{-2}$ .

De plus si  $\beta \in B_{t,f}$ ,  $\psi(\gamma^{-1}\beta\gamma) = \gamma \psi(\beta)\gamma$  pour tout  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ .

On ramène ainsi les assertions de (33) sur les classes de  $SL_2(\mathbb{Z})$  conjugaison de  $B_{t,f}$  à des assertions équivalentes sur les formes quadratiques entières, définies positives, primitives, de discriminant  $(t^2 - 4n)f^{-2}$ , à savoir que :

. le nombre de  $SL_2(\mathbb{Z})$ -classes de telles formes est  $h((t^2 - 4n)f^{-2})$ ,

.  $w((t^2 - 4n)f^{-2})$  est le cardinal de leur groupe d'isotropie dans  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Mais ces assertions sont prouvées dans [1], chap. 2, §7.

- Démonstration de (34) :

Soit  $\beta$  une classe de  $\Gamma$ -conjugaison de  $\Delta$  telle que  $\beta$  soit  $SL_2(\mathbb{Z})$ -conjugué de  $\delta$ . Alors si  $\gamma$  décrit un système de représen-

tants de  $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$ , il y a  $\omega_{\delta} \sigma_{\mathfrak{p}}^{-1}$  éléments  $\gamma$  tels que  $\gamma^{-1} \delta \gamma \in \mathfrak{p}$ . Par suite, pour démontrer (34), il suffit de prouver que :

$$(35) \quad \sum_{\gamma} \chi(\gamma^{-1} \delta \gamma) = \mu(t, f, n)$$

où  $\gamma$  décrit un système de représentants des éléments de  $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$  tels que  $\gamma^{-1} \delta \gamma \in \Delta$ .

Etudions la structure d'un système de représentants de  $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$  ; pour cela soit  $\theta$  la composée des applications :

$$(36) \quad SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})' \rightarrow P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),$$

où  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})'$  désigne l'ensemble des couples d'éléments de  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , premiers entre eux (dans  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ), où  $P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  est la droite projective sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , i.e. le quotient de  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})'$  par les homothéties inversibles de  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , où la seconde flèche de (36) est la surjection canonique, et où la première flèche de (36) est définie par :

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \rightarrow (\bar{u}, \bar{w}),$$

$\bar{u}$  et  $\bar{w}$  étant les classes modulo  $N$  de  $u$  et  $w$ .

Par passage au quotient  $\theta$  définit un isomorphisme de  $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$  sur  $P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ .

Soit  $U$  un système de représentants de  $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$ .

Nous allons démontrer les résultats suivants :

(37) Si  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ , et  $\gamma^{-1} \delta \gamma \equiv \begin{pmatrix} x & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$  modulo  $N$ , la congruence étant considérée terme à terme, alors on a :

$$x^2 - tx + n \equiv 0 \text{ modulo } (fN, N^2).$$

(38) Réciproquement, si  $x \in \mathbb{Z}$  et  $x^2 - tx + n \equiv 0$  modulo  $(fN, N^2)$ , le nombre de  $\gamma \in U$  tels que  $\gamma^{-1} \delta \gamma \equiv \begin{pmatrix} x & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$  modulo  $N$  est égal à  $\varphi_1(N) \varphi_1\left(\frac{N}{(N, f)}\right)^{-1}$ .

Il est bien évident que la conjonction de ces deux assertions entraîne (35) et prouve en outre le fait suivant, énoncé dans le

théorème 3 :

la propriété  $x^2 - tx + n \equiv 0 \pmod{(fN, N^2)}$  ne dépend que de la classe de  $x \pmod N$ .

- Démonstration de (37) :

Soit  $\gamma^{-1} \delta \gamma = \begin{pmatrix} x + \lambda N & \eta \\ \lambda' N & \eta' \end{pmatrix}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} x^2 - tx + n &= x - (x + \lambda N + \eta')x + (x + \lambda N)\eta' - \lambda' N \eta \\ &= \lambda N(\eta' - x - \lambda N) - \lambda' \eta N + \lambda^2 N^2. \end{aligned}$$

Compte tenu des relations  $f \mid \eta$  et  $f \mid (\eta' - x - \lambda N)$ , dues au fait que  $f$  est un invariant de la classe de  $SL_2(\mathbb{Z})$ -conjugaison, on obtient l'assertion (37).

- Démonstration de (38) :

. Si  $\gamma = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \in U$  on a les équivalences :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{-1} \delta \gamma \equiv \begin{pmatrix} x & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod N \iff \delta \gamma \equiv \gamma \begin{pmatrix} x & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} au + bw \equiv xu \pmod N \\ cu + dw \equiv xw \pmod N \end{cases} \end{array} \right.$$

. Si  $x$  vérifie  $x^2 - tx + n = (a-x)(d-x) - bc \equiv 0 \pmod{(Nf, N^2)}$ , on a  $(f, N) \mid \text{pgcd}(a-x, d-x)$ .

Démontrons ceci par localisation. Soit  $v_p$  la valuation  $p$ -adique normalisée sur  $\mathbb{Z}$ . Soit  $s = v_p(f)$ ,  $r = v_p(N)$  et supposons par exemple  $v_p(a-x) < \inf(s, r)$ .

Alors puisque  $v_p(d-a) \geq v_p(f) = s$ , on a  $v_p(d-x) = v_p(a-x)$ .

Mais puisque  $v_p(bc) \geq 2v_p(f) = 2s$ , on a  $v_p(x^2 - tx + n) = 2v_p(a-x)$ , ce qui contredit l'hypothèse  $v_p(x^2 - tx + n) \geq \inf(r+s, 2r)$ .

. Du point précédent, on déduit :

$$(f, N) \mid \text{pgcd}(a-x, d-x, b, c) \mid f.$$

Si donc on pose  $a' = \frac{a-x}{\alpha}$ ,  $b' = \frac{b}{\alpha}$ ,  $c' = \frac{c}{\alpha}$ ,  $d' = \frac{d-x}{\alpha}$ , avec  $\alpha = (f, N)$ , on obtient :



$$\text{pgcd}(a', b', c', d', \frac{N}{(N, f)}) = 1 .$$

Ceci entraîne que, dans  $P(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})$ , avec  $N' = \frac{N}{(N, f)}$ , le système :

$$(40) \quad \begin{cases} a'u + b'w \equiv 0 & (N') \\ c'u + d'w \equiv 0 & (N') \end{cases}$$

admet une solution et une seule, compte tenu du fait que :

$$a'd' - b'c' \equiv 0 \quad (N')$$

La solution du système (40) correspond à  $\varphi_1(N)\varphi_1^{-1}(N')$  solutions du système (39) modulo  $N$ , où  $\varphi_1(N) = \text{Card}(P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$  est la fonction définie dans l'énoncé du théorème 2.

Ceci achève la preuve de (38).

c) Calcul de  $A_3$ , contribution des matrices hyperboliques dont les points fixes sont paraboliques pour  $\Gamma$ .

En utilisant le théorème 2, on voit que les contributions de deux classes  $\dot{\beta}$  et  $-\dot{\beta}$  opposées sont les mêmes.

Soit  $B = \{(\begin{smallmatrix} \lambda' & \tau \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}) / \lambda'\lambda = n, 0 < \lambda' < \lambda, 0 \leq \tau < \lambda - \lambda'\}$ .

Si  $\delta \in B$ , soit  $\psi(\delta)$  la contribution des classes de  $\Delta$  pour  $\mathcal{R}$  formées d'éléments conjugués à  $\delta$  par  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Puisque  $B \cup (-B)$  est un système de représentants des classes de  $SL_2(\mathbb{Z})$ -conjugaison des matrices hyperboliques, entières et de déterminant  $n$ , dont les points fixes sont paraboliques :

$$(41) \quad A_3 = 2 \sum_{\delta \in B} \psi(\delta) = 2 \sum_{\delta \in B} \sum_{\gamma} I(\gamma^{-1}\delta\gamma) n^{k-1}$$

où  $\gamma$  décrit un système de représentants des éléments de  $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$  tels que  $\gamma^{-1}\delta\gamma \in \Delta$ .

Si  $\delta = (\begin{smallmatrix} \lambda' & \tau \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}) \in B$  et si  $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$  est tel que  $\gamma^{-1}\delta\gamma \in \Delta$ , on vérifie aisément en utilisant le théorème 2 que :

$$n^{k-1} I(\gamma^{-1}\delta\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1\right)^{-1} \lambda^{-k} n^{k-1} \chi(\gamma^{-1}\delta\gamma).$$

Ceci conduit à l'expression :

$$A_3 = - \sum_{\substack{0 \leq \lambda' < \lambda \\ \lambda \lambda' = n}} \frac{\lambda, k-1}{\lambda - \lambda'} \sum_{0 \leq \tau < \lambda - \lambda'} \sum_{\gamma} \chi(\gamma^{-1} \delta \gamma).$$

La dernière somme, dans laquelle  $\gamma$  décrit le même ensemble qu'en (41), avec  $\delta = \begin{pmatrix} \lambda' & \tau \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , est égale à  $\mu(\lambda + \lambda', b, n)$ , où  $b = (\lambda - \lambda', \tau)$ , comme on le voit en reprenant la démonstration utilisée pour prouver (35) et qui reste valable sans changements.

Compte tenu de ce que, pour  $b | \lambda - \lambda'$ , il existe  $\varphi\left(\frac{\lambda - \lambda'}{b}\right)$  valeurs différentes de  $\tau$ , vérifiant

$$0 \leq \tau < \lambda - \lambda' \quad \text{et} \quad b = (\tau, \lambda - \lambda'),$$

on obtient le résultat annoncé.

d) Calcul de  $A_4$ , contribution des matrices paraboliques.

Il nous faut trouver un système de représentants des classes de matrices paraboliques pour la relation  $\mathcal{R}$  définie dans le théorème 2. Pour cela, nous allons déterminer un système de représentants des classes de points paraboliques de  $H$  pour  $\Gamma$ , puis pour chacun de ces points, un système de représentants des classes de matrices paraboliques de  $\Delta$  laissant ce point fixe.

- Système de représentants des points paraboliques de  $H$  pour  $\Gamma$ .

Ainsi que le démontre Shimura ([7], chap. 1), on peut prendre comme système de représentants les  $\frac{x}{c}$  où  $c$  décrit l'ensemble des diviseurs de  $N$  et où, pour  $c$  fixé,  $x$  décrit un système de représentants de  $(\mathbb{Z}/c'\mathbb{Z})^*$ , avec  $c' = (c, \frac{N}{c})$ ; de plus on peut choisir les  $x$  pour que soit vérifiée la condition  $(x, N) = 1$ , ce que nous ferons.

Pour tout point parabolique  $\frac{x}{c}$  de cette forme, nous choisirons  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{Z}$  vérifiant  $ax + bc = 1$ . La matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ -c & x \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  envoie  $\frac{x}{c}$  en  $\infty$ , et on a :

$$\begin{pmatrix} x & -b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - cx\zeta & x^2\zeta \\ -c^2\zeta & 1 + cx\zeta \end{pmatrix}.$$

Le stabilisateur de  $\frac{x}{c}$  dans  $\Gamma$  est donc engendré par :

$$\gamma_0 = \left( \begin{pmatrix} 1-cxX & x^2X \\ -c^2X & 1+cxX \end{pmatrix}, \chi(1-cxX)^{-1} (-c^2Xz+1+cxX)^k \right),$$

où  $X$  est le plus petit entier naturel tel que  $c^2X \equiv 0 \pmod{N}$ .

Si  $\gamma = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ -c & x \end{pmatrix}, (-cz+x)^k \right)$ , un calcul direct montre que :

$$(42) \quad \gamma_0 = \gamma^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \chi(1-cxX)^{-1} \right) \gamma.$$

Pour toute pointe  $\frac{x}{c}$ , nous ferons choix de  $\alpha \in [0, 1[$  tel que  $\chi(1-cxX)^{-1} = e^{-2\pi i \alpha}$ .

En fait  $a, b, X$  et  $\alpha$  dépendent de  $c$  et  $x$ , mais nous éviterons de mettre des indices le rappelant, pour ne pas alourdir l'exposé.

- Système de représentants des classes pour  $\mathbb{R}$  de matrices paraboliques fixant une pointe de la  $\Gamma$ -classe de  $\frac{x}{c}$ .

Si  $n$  n'est pas carré,  $\Delta$  ne contient pas de matrices paraboliques et donc  $A_4 = 0$ . Si  $n = m^2$ , avec  $m > 0$ , on a :

$$\begin{pmatrix} x & -b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & \xi \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-cx\xi & x^2\xi \\ -c^2\xi & m+cx\xi \end{pmatrix}.$$

Si  $N|c^2\xi$ ,  $\xi$  est multiple de  $X$ , et une condition nécessaire et suffisante pour que  $m-cx\xi$  soit premier à  $N$  est donc que  $m$  le soit.

On a donc  $A_4 = 0$  si  $(m, N) \neq 1$ , et, lorsque  $(m, N) = 1$ , un système de représentants cherché est formé des éléments suivants de  $\Delta$  :

$$(43) \quad \beta = \left( \begin{pmatrix} m-cxvX & x^2vX \\ -c^2vX & m+cxvX \end{pmatrix}, \chi(m-cxvX)^{-1} (-c^2vXz+m+cxvX)^k \right)$$

où  $v$  décrit un système de représentants des entiers modulo  $m$ .

Ces éléments s'écrivent, si  $\gamma$  est défini comme précédemment :

$$\beta = \gamma^{-1} \left( \begin{pmatrix} m & vX \\ 0 & m \end{pmatrix}, \eta \right) \gamma \quad \text{avec} \quad \eta = m^k \chi(m-cxvX)^{-1}.$$

Le théorème 2 montre que :

$$(44) \quad A_4 = n^{k-1} \sum_{c, x, v} I(\beta)$$

où  $\beta$  est défini comme précédemment à partir de  $c, x$ , et  $v$ .

(Remarque : le réel  $u$  introduit au théorème 2, c) est en fait égal à  $\frac{v}{m}$ ).



- Groupement des contributions.

Lorsque  $c$ ,  $x$  et  $v$  décrivent les ensembles précédemment mentionnés, l'élément  $\beta$  construit en (43) décrit un système de représentants des classes pour  $\mathbb{R}$  d'éléments paraboliques de  $\Delta$ . Il en va de même des  $\beta^*$  construits comme en (43), mais à partir de  $c$ ,  $-x$  et  $-v$ . Nous pouvons donc écrire (44) sous la forme :

$$(45) \quad A_4 = \frac{1}{2n} k^{-1} \sum_{c, x, v} (I(\beta) + I(\beta^*)) .$$

Si  $\alpha^*$  est le réel associé à la pointe  $-\frac{x}{c}$ , on a :

$$e^{-2\pi i \alpha^*} = \chi(1 + cxX)^{-1} .$$

Comme  $c^2X \equiv 0(N)$  et que  $\chi$  est un caractère modulo  $N$ ,

$$e^{2\pi i \alpha} \cdot e^{2\pi i \alpha^*} = \chi(1 - c^2x^2X^2)^{-1} = 1 .$$

Ceci entraîne : 
$$\begin{cases} \alpha^* = 1 - \alpha & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \alpha^* = 0 & \text{si } \alpha = 0 . \end{cases}$$

Utilisant les expressions données au théorème 2, on vérifie que  $I(\beta) + I(\beta^*)$  est nul si  $\alpha \neq 0$ , et vaut, si  $\alpha = 0$  :

$$(46) \quad -m^{-k} \chi(m - cxXv) .$$

- Fin du calcul de  $A_4$ .

Cherchons à quelle condition  $\alpha = 0$  (i.e. à quelle condition  $\frac{x}{c}$  est une pointe régulière pour  $\Gamma$ ).

$$(47) \quad \alpha = 0 \iff \chi(1 - cxX) = 1 .$$

Mais l'application qui à  $w$  associe  $\chi(1 - cwX)$  est un caractère additif modulo  $\frac{N}{cX}$ , car  $(cX)^2 \equiv 0(N)$ . Comme  $x$  est premier à  $N$ , la condition (47) s'écrit encore :

$$\alpha = 0 \iff \forall w \in \mathbb{Z}, \chi(1 - cwX) = 1 \iff g | cX \iff (c, \frac{N}{c}) | \frac{N}{g} .$$

La dernière équivalence résulte de ce que  $cX = \text{ppcm}(c, \frac{N}{c})$ , par définition de  $X$ .

Si  $\alpha = 0$ , la valeur de l'expression (46) s'écrit donc  $-m^{-k} \chi(m)$ ,

puisque  $g|cX$ , et donc (45) s'écrit :

$$(48) \quad A_4 = -\frac{1}{2} n^{k-1} m^{-k} \chi(m) \sum_c \sum_x \sum_v 1, \text{ où :}$$

$c$  décrit les diviseurs de  $N$  tels que  $(c, \frac{N}{c}) | \frac{N}{g}$ ; pour chaque valeur de  $c$ ,  $x$  prend  $\varphi((c, \frac{N}{c}))$  valeurs distinctes; lorsque  $c$  et  $x$  sont fixés,  $v$  prend  $m$  valeurs distinctes. D'où l'expression finale de (48) :

$$A_4 = -\frac{1}{2} n^{\frac{k-1}{2}} \chi(\sqrt{n}) \sum_c \varphi((c, \frac{N}{c})),$$

qui est la formule annoncée.

C.Q.F.D.

Théorème 3'. Si  $k = 2$  et si on définit encore  $T(n)$  et  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  comme entête de chapitre, on a :

$$\text{Tr } T(n) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

avec  $A_1, A_2, A_3, A_4$  définis comme dans le théorème 3, et où  $A_5$  vaut 0 si  $\chi$  n'est pas le caractère principal, et vaut  $\sum_t t$ ,  $t$  décrivant les diviseurs de  $n$  tels que  $(N, \frac{n}{t}) = 1$ , lorsque  $\chi$  est le caractère principal.

Démonstration : Nous utiliserons en fait la formule analytique obtenue par Shimura ([10], p. 273), et donnant un résultat analogue au théorème 2. Dans le cas où nous l'appliquons, elle prouve que  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  représente la différence entre  $\text{Tr } T(n)$  et la trace d'un certain opérateur de Hecke  $T'$  agissant sur l'espace  $M_0(\Gamma_0(N), \chi)$  des formes modulaires entières de poids nul (non nécessairement paraboliques) pour  $\Gamma_0(N)$ , avec caractère  $\chi$ . Cet espace est vide si  $\chi$  n'est pas le caractère principal, auquel cas on a donc  $A_5 = \text{Tr}(T') = 0$ . Si  $\chi$  est le caractère principal,  $M_0(\Gamma_0(N), \chi)$  est l'espace de dimension 1 formé par les fonctions constantes sur  $H$ . Si  $\Delta' = \{((\frac{a}{c} \frac{b}{d}), 1) / (\frac{a}{c} \frac{b}{d}) \in M_2(\mathbb{Z}), ad-bc = n, (d, N) = 1, c \equiv 0(N)\}$ , on a :  $T' = T_{\Delta'}$ , (cf. [10], p. 264).

$T'$  agit sur  $M_0(\Gamma_0(N), \chi)$  comme une homothétie de rapport

$\text{Card}(\Delta'_0 \setminus \Delta')$ , avec  $\Delta'_0 = \{((\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}), 1) / (\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}) \in \Gamma_0(N)\}$  ; or

$\text{Card}(\Delta'_0 \setminus \Delta') = \text{Card}(\Delta' / \Delta'_0)$ , et un système de représentants de  $\Delta' / \Delta'_0$  est formé des éléments  $(\begin{smallmatrix} t & b \\ 0 & n \\ & t \end{smallmatrix})$  où  $t$  décrit les diviseurs de  $n$  tels que  $(\frac{n}{t}, N) = 1$  et où  $b$  varie modulo  $t$ .

Donc, dans ce cas,  $A_5 = \sum_t t$  où  $t$  décrit les diviseurs de  $n$  tels que  $(N, \frac{n}{t}) = 1$ .

C.Q.F.D.

IV - FORMULE DE DIMENSION POUR  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ ,  $k$  DEMI-ENTIER

C'est à nouveau le théorème 2 que nous allons appliquer à un cas particulier :

Ici  $k$  désignera un demi-entier, i.e. un nombre de la forme  $\frac{k'}{2}$ , avec  $k' \in \mathbb{Z}$  et  $k'$  impair ; on supposera  $k > 2$ .

Si  $\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 z}$ , nous savons que, pour  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ ,  $\theta^{k'}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \begin{pmatrix} c & \\ & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & d \end{pmatrix}^{-k} (cz+d)^k \theta^{k'}(z)$  (cf. par exemple [9]).

Soit alors  $N$  un entier multiple de 4 et  $\chi$  un caractère multiplicatif modulo  $N$ , dont le conducteur sera noté  $g$ , et tel que  $\chi(-1) = 1$ . L'application  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \chi(a)^{-1}$  définit un caractère sur  $\Gamma_0(N)$ . Nous poserons :

$$\Delta_0 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \chi(a)^{-1} \begin{pmatrix} c & \\ & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & d \end{pmatrix}^{-k} (cz+d)^k \right) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = \Gamma_0(N) \right\}.$$

Utilisant les notations usuelles (cf. [9]), nous noterons  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  l'espace  $S$  introduit au début de cet article (nous notons  $k$  ce qui est noté  $\frac{k}{2}$  dans [9]).

Nous prendrons  $\Delta = \Delta_0$  ; dans ce cas l'opérateur  $T_\Delta$  est l'identité sur  $S$  et donc sa trace est égale à la dimension de  $S$ .

Nous noterons  $v_p$  la valuation  $p$ -adique normalisée sur  $\mathbb{Z}$ .

Théorème 4.

$$\dim S_k(\Gamma_0(N), \chi) = \frac{k-1}{12} N \prod_{p|N} (1+p^{-1}) - \frac{D}{2}, \text{ avec :}$$

a) Si  $N \equiv 0 \pmod{16}$ ,  $D = \sum_c \varphi\left(c, \frac{N}{c}\right)$ ,  $c$  décrivant l'ensemble des diviseurs de  $N$  tels que  $\left(c, \frac{N}{c}\right) \mid \frac{N}{g}$ .

$$b) \text{ Si } N \not\equiv 0 \pmod{16}, D = \sum_c \varphi\left(c, \frac{N}{c}\right) + \zeta \sum_c \varphi\left(c, \frac{N}{c}\right).$$

Dans la première (resp. la seconde) somme,  $c$  décrit l'ensemble des diviseurs de  $N$  non congrus à 2 modulo 4 (resp. congrus à 2 modulo 4) et tels que  $\left(c, \frac{N}{c}\right) \mid \frac{N}{g}$  (resp.  $\left(c, \frac{N}{c}\right) \mid \frac{2N}{g}$ ).

D'autre part  $\zeta$  prend les valeurs suivantes :

Si  $N \equiv 8 \pmod{16}$  et  $8 \nmid g$ ,  $\zeta = 0$

Si  $N \equiv 8 \pmod{16}$  et  $8 \mid g$ ,  $\zeta = 1$

Si  $N \equiv 4 \pmod{8}$  et s'il existe  $p$  premier,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , tel que  $v_p(N)$  soit impair ou que  $0 < v_p(N) < 2v_p(g)$ , alors  $\zeta = 0$ .

Sinon (i.e : si  $N \equiv 4 \pmod{8}$  et si pour tout premier  $p$  congru à 3 modulo 4 et divisant  $N$ , on a  $v_p(N) \geq 2v_p(g)$  et  $v_p(N)$  pair),  $\zeta$  vaut  $\frac{\varepsilon}{2}(-1)^{(1-2k)/2}$ , avec  $\varepsilon = 1$  si  $4 \mid g$ , et  $\varepsilon = -1$  si  $4 \nmid g$ .

Remarque :

1) Malgré la complication de l'énoncé, le calcul de  $\zeta$  est toujours élémentaire, et sa valeur est toujours  $0, 1, \frac{1}{2}$  ou  $-\frac{1}{2}$ .

2) Il est à noter que la formule donnée dans le théorème 4, curieusement, ne dépend de  $\chi$  que par son conducteur. Cette formule est d'ailleurs prête à être passée sur ordinateur, en vue de la constitution de tables.

Démonstration du théorème 4 :  $\Gamma_0(4)$  et donc à fortiori  $\Gamma_0(N)$  ne contiennent pas de matrices elliptiques. D'autre part les points fixes des matrices hyperboliques d'un groupe fuchsien de première espèce (et en particulier de  $\Gamma_0(N)$ ) ne sont pas des points paraboliques de  $H$  pour ce groupe.

Si nous voulons appliquer le théorème 2, nous n'avons donc à prendre en considération que les contributions des matrices scalaires et paraboliques.

a) Cas des matrices scalaires.

Le calcul, en appliquant le théorème 2 est immédiat et se traite comme le calcul de  $A_1$ , au paragraphe III. La contribution obtenue est :

$$\frac{k-1}{12} N \prod_{p \mid N} (1+p^{-1}).$$

b) Cas des matrices paraboliques.

Pour le début de la démonstration, nous allons utiliser les notations de la démonstration faite au paragraphe III pour le calcul de  $A_4$  ; en particulier nous allons choisir le même système de représentants des points paraboliques de  $H$  pour  $\Gamma$  (à savoir les  $\frac{x}{c}$ , pour  $c|N$ ,  $(x,N) = 1$  et  $x$  défini modulo  $(c, \frac{N}{c})$ ). Pour tout tel couple  $(c,x)$ , nous définirons des entiers  $a,b,X$  comme au paragraphe III. L'élément  $\gamma \in \mathbb{S}\mathbb{Q}$  qui envoie  $\frac{x}{c}$  en  $\infty$  sera également défini comme en III, et la même démonstration que celle utilisée en III prouve que le stabilisateur de  $\frac{x}{c}$  dans  $\Delta_0$  est engendré par :

$$(49) \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= \left( \begin{pmatrix} 1-cxX & x^2X \\ -c^2X & 1+cxX \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1+cxX \end{pmatrix}^{-k} \begin{pmatrix} -c^2X & \\ & 1+cxX \end{pmatrix} \chi(1-cxX)^{-1} (-c^2Xz+1+cxX)^k \right) \\ &= \gamma^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mu \right) \gamma \end{aligned}$$

avec  $\mu = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1+cxX \end{pmatrix}^{-k} \begin{pmatrix} -c^2X & \\ & 1+cxX \end{pmatrix} \chi(1-cxX)^{-1}$ .

Nous poserons  $\mu = e^{-2\pi i \alpha}$  avec  $0 \leq \alpha < 1$ .

Pour la relation  $\mathcal{R}$  définie au théorème 2, un système de représentants des classes de matrices paraboliques de  $\Delta = \Delta_0$  est formé par l'ensemble des matrices  $\gamma_0$  définies en (49), lorsque  $c$  et  $x$  parcourent les ensembles mentionnés plus haut.

Compte tenu de ce que, avec les notations de l'énoncé du théorème 2, e), on a pour ces matrices :

$$u = 1 \quad \text{et} \quad \eta = \mu = e^{-2\pi i \alpha},$$

la contribution des matrices paraboliques s'écrit  $\frac{D}{2}$ , où

$$(50) \quad D = \sum_{c,x} (1-2\alpha)$$

( $\alpha$ , qui dépend de  $c$  et de  $x$  a été défini plus haut).

Comme dans la démonstration du théorème 3, nous allons regrouper des contributions de la façon suivante : lorsque  $(c,x)$  varient ainsi que nous l'avons indiqué plus haut,  $\frac{-x}{c}$ , tout comme  $\frac{x}{c}$  décrit un

système de représentant des pointes de  $H$  pour  $\Gamma$ . Soit  $\alpha^*$  le réel attaché à  $\frac{-x}{c}$  et défini par :

$$(51) \quad e^{-2\pi i \alpha^*} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-cxX \end{pmatrix}^{-k} \begin{pmatrix} -c^2 X \\ 1-cxX \end{pmatrix} \chi(1+cxX)^{-1} \quad \text{et} \quad \alpha^* \in [0, 1[.$$

$D$  s'écrit encore :

$$(52) \quad D = \sum_{c,x} 1-2\alpha^* = \frac{1}{2} \sum_{c,x} ((1-2\alpha) + (1-2\alpha^*)) = \sum_{c,x} (1-\alpha-\alpha^*).$$

Compte tenu de la définition de  $\alpha$  et  $\alpha^*$ , ainsi que des relations  $4|N$  et  $c^2 X \equiv 0 (N)$ , on trouve :

$$e^{-2\pi i \alpha} e^{-2\pi i \alpha^*} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+cxX \end{pmatrix}^{-k} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-cxX \end{pmatrix}^{-k}$$

$x$  étant impair (puisque premier à  $N$ , par définition), on obtient :

$$e^{-2\pi i (\alpha + \alpha^*)} = \begin{cases} 1 & \text{si } 4|cX \\ -1 & \text{si } 4 \nmid cX \end{cases}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$(53) \quad 1-\alpha-\alpha^* = \begin{cases} 1 & \text{si } 4|cX \text{ et } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 4|cX \text{ et } \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 4 \nmid cX \text{ et } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } 4 \nmid cX \text{ et } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \end{cases}.$$

Il ne nous reste plus qu'à effectuer la sommation (52) en utilisant (53).

1er cas :  $8|N$ .

. Compte tenu de la définition de  $X$ ,  $cX = \text{ppcm}(c, \frac{N}{c})$ , et par suite  $cX$  est multiple de 4.

Compte tenu de (52) et (53),  $D$  est égal au nombre de couples  $(c, x)$  pour lesquels  $\alpha = 0$  (i.e : la pointe  $\frac{x}{c}$  est régulière).

Or par définition :

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i \alpha} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1+cxX \end{pmatrix}^{-k} \begin{pmatrix} -c^2 X \\ 1+cxX \end{pmatrix} \chi(1-cxX)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -X \\ 1+cxX \end{pmatrix} \chi(1+cxX) = \begin{pmatrix} 1+cxX \\ X \end{pmatrix} \chi(1+cxX). \end{aligned}$$

Remarquons que  $\begin{pmatrix} 1+cxX \\ X \end{pmatrix}$  vaut  $-1$  si  $X \equiv 2 (4)$  et  $4 \nmid c$ , et vaut 1 sinon.

. En particulier si  $16|N$ , ou bien si  $N \equiv 8 (16)$  et  $c \neq 2 (4)$ , on a

$$\left(\frac{1+cxX}{X}\right) = 1 \quad \text{et donc} \quad e^{-2\pi i\alpha} = \chi(1+cxX).$$

Dans ces cas, on a :

$$\alpha = 0 \iff \chi(1+cxX) = 1 \iff g|cX \iff \left(c, \frac{N}{c}\right) \Big| \frac{N}{g}$$

par la même démonstration que celle utilisée pour le calcul de  $A_4$  dans le paragraphe III.

. Reste à traiter le cas  $N \equiv 8 \pmod{16}$  et  $c \equiv 2 \pmod{4}$  (auquel cas  $X \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\left(\frac{1+cxX}{X}\right) = -1$ ). On a dans ce cas :

$$\alpha = 0 \iff \chi(1+cxX) = -1 .$$

Toujours par la même démonstration que celle utilisée pour le calcul de  $A_4$  dans le paragraphe III, on voit que la condition  $\chi(1+cxX) = -1$  est équivalente à :

$$g|2cX \quad \text{et} \quad g \nmid cX$$

ou encore à :  $g|2cX$  et  $v_2(g) > v_2(cX) = 4$  .

Ceci s'écrit encore :

$$\left(c, \frac{N}{c}\right) \Big| \frac{2N}{g} \quad \text{et} \quad 8|g .$$

Compte tenu du fait que pour  $c$  fixé,  $x$  parcourt un ensemble à  $\varphi\left(c, \frac{N}{c}\right)$  éléments, ceci achève le calcul dans ce premier cas.

2ème cas :  $N \equiv 4 \pmod{8}$ .

. Si  $c \not\equiv 2 \pmod{4}$ , on a  $4|cX$  et  $X \not\equiv 2 \pmod{4}$ , d'où :

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i\alpha} &= \left(\frac{-1}{1+cxX}\right)^{-k} \left(\frac{-c^2X}{1+cxX}\right) \chi(1-cxX)^{-1} \\ &= \left(\frac{1+cxX}{X}\right) \chi(1+cxX) = \chi(1+cxX) . \end{aligned}$$

Le même raisonnement qu'au III, calcul de  $A_4$ , prouve que :

$$\alpha = 0 \iff \chi(1+cxX) = 1 \iff g|cX \iff \left(c, \frac{N}{c}\right) \Big| \frac{N}{g} .$$

Compte tenu de (52) et (53), on obtient ainsi la première somme intervenant dans l'expression de  $D$  donnée dans l'énoncé du théorème 4.



. Si  $c \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $X$  est impair. D'autre part puisque  $(x, N) = 1$ ,  $x$  est impair. Ceci entraîne :

$$\begin{aligned}
 e^{-2\pi i \alpha} &= \left( \frac{-1}{1+cxX} \right)^{-k} \left( \frac{-c^2 X}{1+cxX} \right) \chi(1-cxX)^{-1} \\
 (54) \qquad &= (-1)^{-k} \left( \frac{-1}{-X} \right) \left( \frac{1+cxX}{X} \right) \chi(1-cxX)^{-1} \\
 &= i(-1)^{(1-2k)/2} \chi(1+cxX) \left( \frac{-1}{X} \right)
 \end{aligned}$$

Remarque :  $(1-2k)/2$  est un entier.

On a déjà remarqué que l'application  $x \rightarrow \chi(1+cxX)$  est un caractère additif ; son conducteur  $h$  est le plus petit entier tel que  $g \mid cXh$ . Lorsque  $x$  décrit un système de représentants des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/(c, \frac{N}{c})\mathbb{Z}$ ,  $\chi(1+cxX)$  décrit l'ensemble des racines primitives  $h^{\text{ièmes}}$  de l'unité, chacune d'elles étant obtenue un nombre de fois égal à  $\varphi((c, \frac{N}{c}))(\varphi(h))^{-1}$ .

La contribution que nous cherchons est donc égale, vu les expressions (52), (53) et (54) :

$$(55) \quad -\frac{1}{2}(-1)^{(1-2k)/2} \sum_c \left( \frac{-1}{X} \right) \varphi((c, \frac{N}{c})) \varphi(h)^{-1} A(h)$$

où  $A(h)$  est la différence entre le nombre de racines primitives  $h^{\text{ièmes}}$  de l'unité de partie réelle strictement positive et de celles de partie réelle strictement négative (la partie réelle de ces racines ne peut être nulle, car  $4 \nmid h$ , vu la définition de  $h$ , et compte tenu de ce que  $v_2(g) \leq 2$  et  $v_2(cX) = 1$ ), et où  $c$  décrit les diviseurs de  $N$  congrus à 2 modulo 4.

Si  $r = v_2(h) \leq 1$ , il est évident que  $\sum_{d \mid h} A(d)$  vaut  $\binom{-4}{h}$ . En utilisant la formule d'inversion de Moebius, on démontre aisément que :

$$A(h) = (-1)^r \binom{-1}{h} \prod_{p \mid h} \left( 1 - \binom{-4}{p} \right).$$

Remarquons que par définition de  $h$ ,  $r = 0$  si  $4 \nmid g$ , et  $r = 1$  si  $4 \mid g$ , i.e.  $-(-1)^r = \varepsilon$  avec les notations de l'énoncé du théorème. Posons  $\zeta' = \frac{\varepsilon}{2}(-1)^{(1-2k)/2}$ . L'expression (55) s'écrit :

$$(56) \quad \zeta' = \sum_{c|N, c \equiv 2 \pmod{4}} \binom{-1}{X} \varphi\left(\left(c, \frac{N}{c}\right)\right) \varphi(h)^{-1} \binom{-1}{h} \prod_{p|h} \left(1 - \binom{-4}{p}\right),$$

où, dans la somme précédente,  $h$  et  $X$  dépendent de  $c$ , comme cela a été indiqué plus haut. Nous voulons prouver que l'expression (56) vaut :

$$(57) \quad \zeta' = \sum_c \varphi\left(\left(c, \frac{N}{c}\right)\right) \prod_{p|N} \lambda_p,$$

$c$  parcourant les diviseurs de  $N$  tels que  $c \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\left(c, \frac{N}{c}\right) \mid \frac{2N}{g}$ ,  
 et avec :  $\lambda_p = 0$  si  $p \equiv 3 \pmod{4}$  et si : ou bien  $v_p(N)$  impair  
 ou bien  $v_p(N) < 2v_p(g)$   
 $\lambda_p = 1$  sinon.

Vu la "multiplicativité" des formules (56) et (57), on peut prouver l'égalité de ces expressions en "localisant" en chaque premier  $p$  divisant  $N$  :

. En  $p = 2$ , l'égalité à prouver est :

$$\binom{-1}{1} \varphi(2) \varphi(h)^{-1} = \varphi(2) \lambda_2, \text{ avec } h = 1 \text{ ou } 2.$$

Mais les deux membres sont égaux à 1.

. Si  $p$  est premier,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , si  $r = v_p(N)$  et  $r' = v_p(g)$ , l'égalité à prouver est, "en  $p$ " :

$$\sum_{s=0}^r \varphi(p^{s'}) \varphi(p^t)^{-1} \sigma_t = \sum_{s' \leq r-r'} \varphi(p^{s'})$$

avec  $s' = \inf(s, r-s)$ ,  $t$  le plus petit entier tel que  $r-s'+t \geq r'$ ,  
 et  $\sigma_t$  égal à 0 si  $t > 0$ , à 1 si  $t = 0$ .

En fait pour que  $\sigma_t \neq 0$  (i.e.  $\sigma_t = 1$ ), il faut et il suffit que  $r-s' \geq r'$ , i.e.  $s' \leq r-r'$ , ce qui prouve l'égalité.

. Si  $p$  est premier,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , et si  $r = v_p(N)$  et  $r' = v_p(g)$  l'égalité à prouver est, "en  $p$ " :

$$(58) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s-s'} \varphi(p^{s'}) \varphi(p^t)^{-1} (2-\sigma_t) (-1)^t = \sum_{s' \leq r-r'} \varphi(p^{s'}) \lambda_p,$$

les nombres  $s'$ ,  $t$  et  $\sigma_t$  gardant la même signification qu'au point précédent.

Si  $r$  est impair,  $\lambda_p = 0$ , et le premier membre de (58) est nul, les termes provenant de  $s$  et de  $r-s$  s'annulent mutuellement ; d'où l'égalité (58) dans ce cas.

Soit  $r$  pair et  $0 < r < 2r'$ . Alors  $\lambda_p = 0$  tandis que le premier membre de (58) s'écrit :

$$(59) \quad 2 \sum_{s=0}^{r-r'} \varphi(p^s) + 2 \sum_{s=r-r'+1}^{(r/2)-1} 2\varphi(p^s)\varphi(p^{s+r'-r})^{-1} (-1)^{s+r'-r} \\ + 2 \varphi(p^{r/2})\varphi(p^{r'-r/2})^{-1} (-1)^{r'-r},$$

en groupant les termes relatifs à l'indice  $s$  et l'indice  $r-s$ .

L'expression (59) vaut :

$$2 p^{r-r'} + 4 \sum_{s=r-r'+1}^{(r/2)-1} p^{r-r'} (-1)^{r'-r+s} + 2 p^{r-r'} (-1)^{r'-r/2} = 0,$$

ce qui prouve encore (58) dans ce cas.

Reste le cas où  $r$  est pair et  $r \geq 2r'$ . Dans ce cas, les deux membres de (58) s'écrivent :

$$\sum_{s=0}^r \varphi(s'),$$

ce qui achève la démonstration de (58) dans ce cas, et par là-même aussi celle du théorème.

C.Q.F.D.

Théorème 4'. Si  $k = \frac{1}{2}$  (resp.  $k = \frac{3}{2}$ ), l'expression obtenue dans le théorème 4 sous la forme  $\frac{k-1}{12} N \prod_{p|N} (1+p^{-1}) - \frac{D}{2}$  est en fait égale à  $\dim S_k(\Gamma_0(N), \chi) - \dim M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)$ , l'espace  $M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)$  étant l'espace des formes modulaires entières non nécessairement paraboliques de poids  $2-k$  pour le groupe  $\Gamma_0(N)$  et le caractère  $\chi$ .

La démonstration du théorème 4 sert en fait de preuve à ce résultat, à condition de remplacer l'utilisation du théorème 2 par la formule analytique de Shimura (cf. [10], p. 273).

Remarque : Le théorème 4' reste vrai si  $k < 0$ , pour les mêmes raisons ; dans ce cas,  $S_k(\Gamma_0(N), \chi) = \emptyset$  et on obtient donc ainsi la dimension de  $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ , pour  $k > 2$ .

ANNEXE : QUELQUES CALCULS D'INTEGRALES

Proposition 1. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $H$  telle que  $f(z)y^{k/2}$  soit bornée sur  $H$ . Alors, si  $k > 2$  et  $\tau \in H$ , on a :

$$(1') \int_H f(z)(-\tau+\bar{z})^{-k} y^k dV = \bar{c}_k f(\tau) \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{\pi}{k-1} i^{-k} 2^{2-k}.$$

Démonstration : L'intégrale converge absolument, vu les hypothèses qui sont faites, et, sur  $H - \{\tau\}$ , on a :

$$f(z)(\bar{z}-\tau)^{-k} y^{k-2} dx dy = d\Omega,$$

$$\text{avec} \quad \Omega = -f(z) \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^{k-1} (\bar{z}-\tau)^{1-k} \frac{dz}{(k-1)(z-\tau)}.$$

Appliquant la formule de Green-Riemann au contour ci-contre, on voit que l'intégrale (1') s'écrit :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} \Omega + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} -\Omega.$$

Le premier de ces deux termes est nul, et le second vaut :

$$\frac{2\pi i}{k-1} f(\tau) (\text{Im}\tau)^{k-1} (-2i\text{Im}\tau)^{1-k} = \bar{c}_k f(\tau).$$

Proposition 2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a| < 1$ . Alors, si  $r \in \mathbb{R}^*$ , on a, lorsque  $k > 1$  :

$$\int_{C_r} (-\bar{z}+az)^{-k+1} y^{k-2} dy = \pi i^{-k} 2^{2-k},$$

$C_r$  étant le cercle de centre  $ir$  et de rayon  $r$ .

Posons  $\xi = \frac{x}{y}$ . On a  $\frac{dy}{y} = -2\xi(1+\xi^2)^{-1} d\xi$ , et l'intégrale à calculer s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\xi(1+\xi^2)^{-1} ((a-1)\xi + (a+1)i)^{-k+1} d\xi.$$

Appliquant le théorème des résidus à un demi-cercle situé dans le plan inférieur (le seul résidu qui entre en ligne de compte est  $-i$ ),

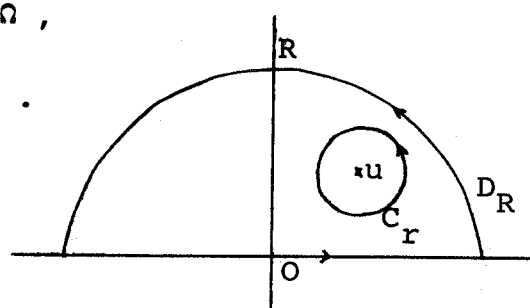


fig. 3

et faisant tendre ce demi-cercle vers l'infini, on trouve pour valeur de l'intégrale :

$$-2\pi i \left( -(a-1)i + (a+1)i \right)^{1-k} = 2^{2-k} \pi i^{-k} .$$

Proposition 3. Soit  $k > 1$ ,  $\alpha \in [0, 1[$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,

$\mathbb{Z}' = \{n \in \mathbb{Z} / u+n \neq 0\}$ . Alors

$$\lim_{\substack{c > 0 \\ c \rightarrow 0}} \sum_{n \in \mathbb{Z}'} e^{2\pi i \alpha n} (u+n)^{-1} (1-ic(u+n))^{-k+1}$$

existe et vaut :  $i\pi e^{-2\pi i u \alpha} (1-2\alpha)$  si  $u \in \mathbb{Z}$

$$i\pi e^{-2\pi i u \alpha} (1-i \cotg \pi u) \quad \text{si } u \notin \mathbb{Z} .$$

Supposons d'abord  $\alpha \neq 0$  et  $u \notin \mathbb{Z}$  fixés.

Posons  $a_n = e^{2\pi i \alpha n}$  et  $b_n(c) = (u+n)^{-1} (1-ic(u+n))^{-k+1}$ .

En appliquant le théorème des accroissements finis, on peut prouver qu'il existe  $A > 0$  tel que :

$$\forall c \in \mathbb{R}, |c| \leq 1 \implies |b_{n+1}(c) - b_n(c)| \leq \frac{A}{n^2} \quad \text{si } |n| > 1 .$$

D'autre part, les sommes  $\sum_{p < n < q} a_n$  sont bornées. Le théorème d'Abel montre donc que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n(c)$  converge uniformément pour  $c \in [-1, 1]$  et donc que sa limite lorsque  $c=0$  est :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \alpha n} (u+n)^{-1} = i\pi e^{-2\pi i u \alpha} (1-i \cotg \pi u) .$$

Cette dernière égalité se démontre en remarquant que les deux membres sont des fonctions méromorphes ayant mêmes pôles en  $0$ , avec même résidu égal à  $1$ , et vérifiant l'équation fonctionnelle  $f(u+1) = e^{-2\pi i \alpha} f(u)$ . La différence des deux membres est donc une fonction entière ; elle est bornée et tend vers  $0$  si  $u$  tend vers  $i\infty$ . D'où la conclusion (c'est pour prouver que la différence est bornée que l'on se sert de  $\alpha < 1$ ).

Si  $u = n_0 \in \mathbb{Z}$  on obtient par la même méthode comme limite la quantité suivante :



$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}'} e^{2\pi i n \alpha} (u+n)^{-1} &= \lim_{u \rightarrow n_0, u \neq n_0} i\pi e^{-2\pi i u \alpha} (1 - i \cotg \pi u) - \frac{e^{-2\pi i n_0 \alpha}}{u - n_0} \\ &= i\pi e^{-2\pi i u \alpha} (1 - 2\alpha). \end{aligned}$$

Il reste encore à traiter le cas où  $\alpha = 0$ . On ne peut dans ce cas passer brutalement à la limite membre à membre, car la série obtenue ne convergerait pas. Mais en regroupant les termes de la somme correspondant à deux indices  $n$  et  $-n$  opposés, le raisonnement précédent reste valable et conduit au résultat annoncé.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] Z.I. BOREVITCH, I.R. CHAFAREVITCH.- Théorie des nombres, Monographies Internationales de Mathématiques Modernes. Gauthier-Villars (1967).
- [2] M. EICHLER.- The Basis Problem for modular forms and the traces of the Hecke operators. In : Modular Functions of One Variable I, Lecture Notes in Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York : Springer (1973).
- [3] M. EICHLER.- Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen. Birkhäuser (1963) (English edition, Academic Press, 1966).
- [4] H. HIJIKATA.- Explicit formula of the traces of Hecke operators for  $\Gamma_0(N)$ , J. Math. Soc. Japan, vol. 26, p. 56-82 (1974).
- [5] A. OGG.- Modular forms and Dirichlet series. New York-Amsterdam : W. A. Benjamin, Inc. (1969).
- [6] A. SELBERG.- Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian. Math. Soc., 20, p. 47-87 (1956).
- [7] G. SHIMURA.- Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton University Press (1971).
- [8] G. SHIMURA.- On modular forms of half integral weight. Ann. of Math., 97, p. 440-481 (1973).
- [9] G. SHIMURA.- Modular forms of half integral weight. In : Modular Functions of One Variable I, Lecture notes 320, Berlin-Heidelberg-New York : Springer (1973).
- [10] G. SHIMURA.- On the trace formula for Hecke operators, Acta Math., vol. 132, p. 245-281 (1974).
- [11] D. ZAGIER.- Trace des opérateurs de Hecke, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année, n° 23 (1975/76).

