ALGÈBRE. — *Sur les anneaux semi-principaux ou de Bezout.*
Note (*) de M. **Marcel Chadeyras**, présentée par M. René Garnier.

Étude des anneaux intègres où tout idéal de type fini est principal.

(Par intègre, nous entendons commutatif, avec élément unité et sans diviseur de o; par semi-local, nombre fini d'idéaux maximaux.)

1. *Définition et propriétés.* — Un anneau A sera dit semi-principal s'il est intègre et si tout idéal de type fini est principal.

Ceci équivaut à : A est intègre et deux éléments quelconques ont un p. g. c. d. donné par l'identité de Bezout :

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \xrightarrow{+\text{ intègre}} & \xrightarrow{+\text{ p.g.c.d.}} & \xrightarrow{+\text{ local}} & \\
\hline
\uparrow & \text{A héréditaire} \longleftarrow & \text{A Dedekind} \longleftarrow & \text{A principal} \longleftarrow & \text{A de valuation discrète} \\
+\text{ nœthérien} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
| & \text{A semi-héréditaire} \longleftarrow & \text{A Prüfer} \longleftarrow & \text{A semi-principal} \longleftarrow & \text{A de valuation}
\end{array}$$

Ce diagramme nous pousse à adopter le terme « semi-principal ». Certaines propriétés ci-dessous figurent dans (2).

Pour que A soit principal il faut et il suffit qu'il soit nœthérien et semi-principal. Pour que A soit semi-principal il faut et il suffit que ce soit un anneau de Prüfer avec p. g. c. d. Pour que A soit de valuation il faut et il suffit qu'il soit semi-principal et local.

Soit φ un homomorphisme d'anneaux : $A \rightarrow B$. Si dans A, tout idéal de type fini est principal, il en est de même dans $\varphi(A)$. En particulier, si $\mathfrak{p}$ est idéal premier de A semi-principal, $A/\mathfrak{p}$ est semi-principal.

La propriété d'être semi-principal se transmet aux anneaux de fractions relatifs à un système multiplicatif. D'où si A est semi-principal et si K est son corps des fractions, l'ensemble des anneaux de valuation de K contenant A est identique à celui des $A_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ est idéal premier de A. Si $\mathfrak{m}$ est idéal premier d'un anneau A semi-principal, les idéaux primaires contenus dans $\mathfrak{m}$ sont emboîtés. On remarque que la chaîne des idéaux primaires contenus dans une intersection d'idéaux premiers possède un plus grand élément qui est premier. Et l'on peut parler d'un « arbre » des idéaux primaires.

2. *Exemples d'anneaux semi-principaux.* — Proposition. — *Soient* A *un anneau semi-local et intègre, et* P *un* A-*module projectif de type fini. Alors* P *est libre.*

Cette propriété généralise une propriété connue dans le cas où A est nœthérien. Elle sera montrée à l'aide des lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soient* A *un anneau commutatif à élément unité,* Ω *son spectre maximal et* L *un* A-*module libre de type fini. Il y a équivalence de :*

1° $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *forment une base de* L *sur* A;

2° $\forall\, \mathfrak{m} \in \Omega$, *les classes* $\bar{y}_1 = y_1 + \mathfrak{m}L$, $\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ *forment une base de* $L/\mathfrak{m}L$ *sur* $A/\mathfrak{m}$.

LEMME 2 (Serre). — *Soient* A *un anneau intègre,* P *un* A-*module projectif de type fini. Alors* $[P/\mathfrak{m}P : A/\mathfrak{m}]$ *est indépendant de* $\mathfrak{m} \in \Omega$.

Soient donc $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de A. Comme P est projectif, il est facteur direct d'un module libre L de type fini : $L = P \oplus P'$. D'où $L/\mathfrak{m}_i L = P/\mathfrak{m}_i P \oplus P'/\mathfrak{m}_i P'$.

Chacun des facteurs est un espace vectoriel sur $A/\mathfrak{m}_i$. Soient $(\bar{x}_1^i, \ldots, \bar{x}_q^i)$ et $(\bar{x}_{q+1}^i, \ldots, \bar{x}_r^i)$ des bases respectives. Le nombre d'éléments de ces bases est indépendant de $\mathfrak{m}_i$, par le lemme 2.

Un lemme de Serre montre l'existence, pour tout $j = 1, 2, \ldots, r$ de

$$y_j \begin{cases} \in P & \text{pour } j = 1, \ldots, q; \\ \in P' & \text{pour } j = q+1, \ldots, r \end{cases} \qquad \text{tel que} \quad \bar{x}_j^i = y_j + \mathfrak{m}_i L.$$

Le lemme 1 montre alors que $(y_1, \ldots, y_r)$ est une base de L, donc que $(y_1, \ldots, y_q)$ est une base de P.

THÉORÈME. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. A *est un anneau de Prüfer semi-local;*

b. A *est semi-principal et semi-local;*

c. A *est intersection d'un nombre fini d'anneaux de valuation d'un même corps.*

Pour cela, outre ce qui précède, on utilise le résultat suivant (5) :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des anneaux de valuation d'un corps K, sans relation d'inclusion entre eux, et dont les idéaux maximaux respectifs sont $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$.

On pose

$$B = \bigcap_i A_i \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}_i = B \cap \mathfrak{m}_i.$$

Alors les $\mathfrak{P}_i$ sont les idéaux maximaux de B, K est son corps des fractions et $A_i = B_{\mathfrak{P}_i}$.

(*) Séance du 7 novembre 1960.

(1) CARTIER, *Rationalité des diviseurs en Géométrie algébrique* (*Bulletin de la S. M. F.*, III, 1958).

(2) JAFFARD, *Les systèmes d'idéaux*, Dunod, Paris, 1960.

(3) SERRE, *Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle*, Séminaire Dubreil, 1957-1958.

(4) ZARISKI-SAMUEL, *Commutative algebra*, 1958, 1960.

(5) *Cf.* BOURBAKI, *Algèbre commutative.*

(*Faculté des Sciences, Clermont-Ferrand.*)